VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 January 1990 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद्

विषय-सूची

1.	निम्न आवृति पर छिछले ट्रैपों वाले रोधी पदार्थों में वाहक संख्या उच्चावचन	पी० शर्मा, वाइं० के० शर्मा तथा एम० पी० सिंह	1
2.	प्रतिचित्र के अनुक्रम का अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय	प्रतिमा रावत	9
3.	पूर्ण दूरीक समष्टि में बहुमान वाले संकुचन प्रतिचित्रण	के० कुरेशी तथा आर० के० पाण्डेय	15
4.	फूरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता	वेद प्रकाश, एस० के० वर्मा तथा ए० के० दलेला	19
5.	सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर पर कुछ प्रमेय (II)	एस० एन० सिंह	25
6.	Lip (α,p) वर्ग फलन के सन्निकटन की कोटि	टीकम सिंह तथा मनोज सिंह	39
7.	रामतिल के बीज एवं बीजों के अंकुरण का अध्ययन	अर्चना पाण्डेय	43
8.	सौर ऊर्जा का प्रकाश-रासायनिक रूपान्तरण	सुरेश सी० अमेटा, कु० साधना खमेसरा, मंजुबाला तथा जी० सी० दुबे	49
9.	O-N-O मोएइटी युक्त O-(एन-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफोनोइमीनो) एथेनॉल तथा इसके द्विसंयोजक धातु संकुलों के कीटाणुनाशी गुणों का अन्वेषण	डी० डी० ओझा, सुश्री सांत्वना गौड़ तथा आर० के० मेहता	55
10.	हिपूरिक अम्ल के Be(II), Hg (II), V(IV) तथा Al (III)संकरों के स्थायित्व स्थिरांक	गोपेन्द्र कुमार	61

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

निम्न आवृति पर छिछले ट्रैपों वाले रोधी पदार्थों में वाहक संख्या उच्चावचन

पी० शर्मा, वाई० के० शर्मा तथा एम० पी० सिंह
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—अप्रैल 26, 1989]

सारांश

निम्न आवृति पर छिछले ट्रैपों वाले रोधी पदार्थ के धारा-वोल्टता अभिलक्षण के पूर्ण परास में वाहक संख्या उच्चावचनों का अध्ययन किया गया है। पूर्ण निम्न आवृति रव अभिलक्षण में रव प्रतिरोध तथा वोल्टता उच्चावचनों के लिए स्पेक्ट्रमी घनत्व व्युत्पन्न किये गये हैं। यह देखा जाता है कि नमूने में छिछले ट्रैपों की उपस्थिति धारा प्रवाह के पूरे परास में रव आचरण को बदलने में अत्यन्त प्रभावशाली है।

Abstract

Carrier number fluctuations in insulating materials with shallow traps at low frequency. *By* P. Sharma, Y. K. Sharma and M. P. Singh, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

The carrier number fluctuations are studied in the complete range of current-voltage characteristic of insulating material with shallow traps at low frequency. The noise resistance and spectral density for voltage fluctuations are derived in the complete low frequency noise characteristic. It is observed that the presence of shallow traps in the sample is very effective to change the noise behaviour in the complete range of current flow.

वैद्युत संचालन में उच्चावचनों से ठोस प्रावस्था युक्तियों में $1/f$ रव प्राप्त होता है[1,2]। वाहक संख्या उच्चावचन किसी युक्ति की संवेदन-शीलता तथा सुतथ्यता को प्रभावित करने वाले प्रथम प्रकार के आवृति आश्रित रव को व्यक्त करते हैं। प्रस्तुत विश्लेषण में निम्न आवृति पर रोधी पदार्थ

एकाकी अंतःक्षेपण धारा प्रवाह में वाहक संख्य उच्चावचनों का अध्ययन किया गया है। सामान्य समीकरणों की सहायता से सिद्धान्त प्राप्त किया गया है जिसमें समतलीय संरचना में धारा प्रवाह का वर्णन हुआ है।[1,4]

सामान्य समीकरण

छिछले ट्रैपों वाले रोधक में धारा प्रवाह तथा प्वायसाँ नियम के अभिलाक्षणिक समीकरणों को निम्नवत् लिखा जाता है

$$J=e\mu nE \tag{1}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}=n-n_0 \tag{2}$$

जहाँ J धारा घनत्व है, e इलेक्ट्रानिक आवेश का आयाम है, μ धारावाहकों की गतिशीलता है, n तथा n_0 क्रमशः x दूरी पर धारावाहक की सान्द्रता तथा इसके उष्मीय साम्य मान हैं, E विद्युत क्षेत्र शक्ति हैं तथा θ छिछले ट्रैपों का वर्णन करने वाला प्राचल है। ओमिक स्पर्श के लिए सीमा-प्रतिबन्ध समीकरण (3) द्वारा दिया जाता है।[3]

$$E(0)=0 \tag{3}$$

रोधी के आरपार प्रयुक्त वोल्टता

$$V=\int_0^L E(x)\,dx \tag{4}$$

द्वारा व्यक्त की जाती है जहां L युक्ति (device) की लम्बाई है।

रोधी को लैम्पर्ट तथा मार्क द्वारा[3] वर्णित काल्पनिक संक्रमण तल x_1 की सहायता से दो क्षेत्रों में बाँटा जा सकता है। इस तरह निम्नलिखित सामान्य समीकरण प्राप्त होंगे।

क्षेत्र I $(0\leqslant x\leqslant x_1)$: अवकाश आवेश क्षेत्र

$$J=e\mu nE \tag{5}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}=n \tag{6}$$

$$n(x_1)=n_1(x_1)=n_0 \tag{7}$$

क्षेत्र II $(x_1\leqslant x\leqslant L)$: ओमिक क्षेत्र

$$J=e\mu\, n_0\, E \tag{8}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}=0 \tag{9}$$

दोनों क्षेत्रों में विद्युत क्षेत्र शक्ति का मान समीकरण (5), (6) तथा (8) द्वारा निम्नवत् ज्ञात किया जाता है :

क्षेत्र I :

$$E(x)=\left[\frac{2J}{\mu\theta\epsilon}\right]^{1/2} x^{1/2} \tag{10}$$

क्षेत्र II :

$$E\Omega=\frac{J}{e\mu n_0} \tag{11}$$

समीकरण (6), (7) तथा (10) से संक्रमण तल प्राप्त होता है जो इस प्रकार है :

$$x_1=\frac{\theta\epsilon J}{2e^2\,\mu\, n^2_0} \tag{12}$$

संक्रान्तिक धारा तथा संक्रान्तिक वोल्टता उस विन्दु पर प्राप्त होते हैं जब $x_1=L$। समीकरण (4), (10) एवं (12) से

$$J_{cr}=\frac{2e^2\,\mu\, n^2_0\, L}{\theta\epsilon} \tag{13}$$

$$J_{cr}=\frac{4}{3}\quad\frac{e\, n_0\, L^2}{\theta\epsilon} \tag{14}$$

प्राप्त होते हैं।

क्षेत्र I में वाहक उच्चावचन के कारण रव

लघु सिग्नल समीकरणों को

$$E=E_0+\triangle E,\quad n=n_1+\Delta n,\quad J=J_0+\triangle J \tag{15}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जहाँ उच्चतर कोटिक पदों की उपेक्षा कर दी जाती है।

धारा समीकरण (1) से

$$\triangle J=e\mu n\triangle E+e\mu\triangle nE \tag{16}$$

प्राप्त होता है जो बतलाता है कि धारा घनत्व में होने वाले उच्चावचन वाहक घनत्व तथा विद्युतक्षेत्र में होने वाले उच्चावचनों के योगफल द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।

विवृत सरकिट के निर्गम (output) का उपयोग एकाकी अंतःक्षेपण ठोस प्रावस्था डायोड में रव का अध्ययन करने के लिए किया जाता है। यह मान लेने पर कि कैथोड अपेक्षतया लघु अवरोधक (बेरियर) के साथ अंतःक्षेपण सम्पर्क है और ऐनोड वृहत अवरोध-स्पर्श है तो डायोड के ऐनोड पर वाहक घनत्व शून्य होगा अर्थात् $\Delta J=0$.

माना कि $\triangle J=0$ तथा $\triangle n \simeq \delta n_1$ तो समीकरण (16)

$$n_1 \triangle E + E_0\, \delta n_1 = 0 \tag{17}$$

बन जाता है जहाँ समीकरण (15) प्रयुक्त किया जाता है ।

समीकरण (6), (15) तथा (17) से विद्युत क्षेत्र शक्ति के उच्चावचन प्राप्त होते हैं जो निम्नवत् हैं—

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}\triangle E + E_0\, \delta n_1 = 0 \tag{18}$$

समीकरण (18) के समाकलन से

$$V(x)\, \delta n_1 + \frac{\theta\epsilon}{e} E(x)\, \triangle E = \alpha \tag{19}$$

प्राप्त होता है जहाँ α समाकलन अचर है तथा

$$\int E_0\, dx = V(x) \tag{20}$$

समाकलन अचर $\alpha = 0$ को सीमा-प्रतिबन्ध

$$E(x)=0,\ V(x)=0 \quad x=0 \text{ पर}$$

प्राप्त करते हैं । क्षेत्र I में किसी बिन्दु x पर उच्चावचन वाले विद्युत क्षेत्र को समीकरण (19) से निम्नलिखित रूप में प्राप्त किया जाता है—

$$\triangle E(x) = -\frac{e}{\theta\epsilon}\ \frac{V(x)}{E(x)}\ \delta n_1 \tag{21}$$

क्षेत्र I में स्थिति x पर सम्प्रयुक्त वोल्टता का मान समीकरण (4) तथा (10) से निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है

$$V(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{2J}{\theta\epsilon\mu}\right)^{1/2} x^{3/2} \tag{22}$$

समीकरण (10) से तथा (22) से क्रमशः $E(x)$ तथा $V(x)$ के मान रखने पर समीकरण (21) का रूप इस प्रकार हो जाता है

$$\triangle E(x) = -\left(\frac{2ex}{3\theta\epsilon}\right) \delta n_1 \tag{23}$$

क्षेत्र I की सीमाओं के भीतर समीकरण (23) के समाकलन से क्षेत्र I के आर-पार वोल्टता उच्चावचन प्राप्त होता है

$$\triangle V(x_1) = -\frac{1}{3}\ \frac{ex^2_1}{\theta\epsilon}\ \delta n_1 \tag{23}$$

जहाँ x_1 का मान समीकरण (12) द्वारा दिया जाता है।

समीकरण (24) का फूरियर विश्लेषण करने पर क्षेत्र I के आर-पार वोल्टता उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् प्राप्त होती है —

$$S_{V_I}(f)=4\,kT\,R_{n_1}=\frac{e^2\,x^4_1}{9\,\theta^2\,\epsilon^2}\,S_{n_1}(f) \tag{25}$$

जहाँ k बोल्ट्जमान अचर है, T जालक ताप है, R_{n_1} अवकाश आवेश क्षेत्र I का रव प्रतिरोध है और $S_{n_1}(f)$ विभव निम्निष्ठ में वाहक घनत्व उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता है। समीकरण (12) तथा (25) से $S_{V_I}(f)$ के लिए जो व्यंजक प्राप्त होगा वह निम्नवत् होगा—

$$S_{V_I}(f)=\frac{\theta^2\,\epsilon^2\,J^4}{144\,e^6\,n^8_0\,\mu^4}\,S_{n_1}(f) \tag{26}$$

वाहक उच्चावचन की स्पेक्ट्रमी तीव्रता का मान निम्नांकित समीकरण द्वारा दिया जाता है[2]

$$S_{n_1}(f)=2\bar{n}_1=\frac{2\,SJ}{e} \tag{27}$$

जहाँ n_1 प्वायसां वितरण के अनुसार है तथा S क्षेत्रफल है अनुप्रस्थ काट का। समीकरण (26) तथा (27) से स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् हो जाती है

$$S_{V_I}(f)=4\,kT\,R_{n_1}=\frac{e^2\,\epsilon^2\,J^5\,S}{72\,e^7\,\mu^4\,n^8_0} \tag{28}$$

जिससे

$$R_{n_1}=\frac{e^2\,\epsilon^2\,J^5\,S}{288\,e^7\,\mu^4\,n^8_0\,kT} \tag{29}$$

प्राप्त होता है।

क्षेत्र II में वाहक उच्चावचनों के कारण रव

क्षेत्र II के धारा समीकरण (8) के रैखिकीकरण से क्षेत्र II में किसी बिन्दु x पर विद्युत क्षेत्र में उच्चावचन

$$\triangle E(x)=-\frac{E_0\,\delta n_0}{n_0} \tag{30}$$

के रूप में प्राप्त होता है जहाँ समीकरण (15) का उपयोग किया गया है।

क्षेत्र I की सीमाओं के अन्तर्गत समीकरण (30) के समाकलन से

$$\triangle V=\int_{x_1}^{L} \triangle E(x)\, dx=-\frac{J}{e\mu\, n^2{}_0}\,[L-x_1]\,\delta n_0 \tag{31}$$

प्राप्त होता है जहाँ (11) तथा (30) का उपयोग किया जाता है।

समीकरण (31) के फूरियर विश्लेषण से क्षेत्र II के आर-पार वोल्टता उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् प्राप्त होती है

$$S_{V_{II}}(f)=4\,kT\,R_{n_2}=\left[\frac{J(L-x_1)}{e\mu\, n^2{}_0}\right]^2 S_{n_0}(f) \tag{32}$$

जहाँ

$$S_{n_0}(f)=\frac{2\,J\,S}{e} \tag{33}$$

समीकरण (32) में समीकरण (12) तथा (33) प्रतिस्थापित करने पर क्षेत्र II के आर-पार स्पेक्ट्रमी तीव्रता तथा रव-प्रतिरोधकता

$$S_{V_{II}}(f)=4\,kT\,R_{n_2}=\frac{2\,J^3S}{e^3\,\mu^2\,n^4{}_0}\left[L-\frac{e\in J}{2\,e^2\,\mu\,n^2{}_0}\right]^2 \tag{34}$$

$$R_{n_2}=\frac{J^3S}{2\,e^3\mu^2\,n^4{}_0\,kT}\left[L-\frac{\theta\in J}{2e^2\,\mu\,n^2{}_0}\right]^2 \tag{35}$$

हो जाते हैं। रोधी में उच्चावचन के कारण उत्पन्न वोल्टता उच्चावचनों का सम्पूर्ण स्पेक्ट्रमी घनत्व समीकरण (36) द्वारा दिया जाता है

$$S_V(f)=S_{V_I}(f)+S_{V_{II}}(f)=4\,k\,T\,R_n \tag{36}$$

जहाँ

$$R_n=R_{n_1}+R_{n_2} \tag{37}$$

(28), (29), (34) तथा (37) समीकरणों से निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं

$$S_V(f)=\left[\frac{37}{72}\,\frac{\theta^2\in^2 J^5\,S}{e^7\,\mu^4\,n^8{}_0}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n^4{}_0}-\frac{2\theta\in J^4L\,S}{e^5\,\mu^3\,n^6{}_0}\right] \tag{38}$$

$$R_n=\frac{1}{4\,k\,T}\left[\frac{37}{72}\,\frac{\theta^3\in^2 J^5\,S}{e^7\,\mu^4\,n^8{}_0}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n^4{}_0}-\frac{2\theta\in J^4L\,S}{e^5\,\mu^3\,n^6{}_0}\right] \tag{39}$$

पूर्ण रव के अभिलक्षण

सम्पूर्ण रव अभिलक्षण को चार पृथक रव क्षेत्रों में विभाजित किया जा सकता है जो निम्नवत् हैं :

(a) धारा के अत्यल्प अंतःक्षेपण स्तर पर रव

पूर्ण धारा-वोल्टता अभिलक्षण का शुभारम्भ असली ओह्म क्षेत्र से शुरू होता है जहाँ केवल क्षेत्र II होता है। क्षेत्र II में हुए वाहक घनत्व उच्चावचन निम्न आवृति रव में हाथ बँटाते हैं। अत्यन्त निम्न धारा पर रव प्रतिरोध तथा वोल्टता उच्चावचनों का स्पेक्ट्रमी घनत्व समीकरण (34) तथा (35) से निम्नवत् व्युत्पन्न किये जाते हैं :

$$S_{Vt}(f)=4\,k\,T\,R_t=\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n_0^4} \tag{40}$$

$$R_t=\frac{J^3\,L^2\,S}{2\,e^3\,\mu^2\,n_0^4\,kT} \tag{41}$$

जहाँ क्षेत्र I के योगदान की उपेक्षा की जाती है।

(b) धारा के निम्न अन्तःक्षेपण स्तर पर रव

धारा का अंतःक्षेपण स्तर इतना उठ जाता है कि धारा प्रवाह में दोनों क्षेत्र अपना हाथ बँटाते हैं। ओमिक क्षेत्र में ही रव के व्यंजक समीकरण (38) तथा (39) से निम्नवत् व्युत्पन्न किये जाते हैं

$$S_{V_0}(f)=4\,k\,T\,R_0$$

$$-\left[\frac{37}{72}\frac{\theta^2\,\epsilon^2\,J^5S}{e^7\,\mu^4\,n_0^8}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^2\,\mu^2\,n_0^4}-\frac{2\,\theta\,\epsilon\,J^4L\,S}{e^5\,\mu^3\,n_0^6}\right] \tag{42}$$

$$R_0=\frac{1}{4k\,T}\left[\frac{37}{72}\frac{\theta^2\,\epsilon^2\,J^5\,S}{e^7\,\mu^4\,n_2^8}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n_0^4}-\frac{2\theta\,\epsilon\,J^4\,L\,S}{e^5\,\mu^3\,n_0^6}\right] \tag{43}$$

(c) क्रान्तिक धारा पर रव

क्रान्तिक धारा पर संक्रमण तल x_1 ऐनोड तक पहुँच जाता है। क्षेत्र I में उपस्थित वाहक घनत्व उच्चावचनों द्वारा रव का एककीकरण होता है। वोल्टता उच्चावचनों का क्रांतिक स्पेक्ट्रमी घनत्व तथा क्रांतिक रव प्रतिरोध को समीकरण (25) तथा (29) द्वारा निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है—

$$S_{V_{cr}}(f)=4\,k\,T\,R_{cr}=\frac{4\,e^3\mu\,n_0^2\,L^5\,S}{9\,\theta^3\,\epsilon^3} \tag{44}$$

$$R_{cr}=\frac{e^3\mu\,n_0^3\,L^5S}{9\,\theta^3\,\epsilon^3\,kT} \tag{45}$$

जहाँ पर क्रांतिक धारा J_{c_r} का मान समीकरण (13) से प्रतिस्थापित किया जाता है।

(d) धारा के उच्च अन्तःक्षेपण स्तर पर रव

रोधी में केवल क्षेत्र I उपस्थित है और संक्रमण तल x_1 नमूने से विलग हो जाता है। इस

प्रक्षेत्र में वाहक घनत्व उच्चावचन अवकाश आवेश द्वारा प्राप्त किये जाते हैं। स्पेक्ट्रमी घनत्व तथा रव प्रतिरोध को समीकरण (25) तथा (29) से निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है

$$S_{V_h}(f)=4\,k\,T\,R_h=\frac{2\,J\,e\,S\,L^4}{9\,\theta^1\,\epsilon^3} \tag{46}$$

$$R_h=\frac{e\,J\,S\,L^4}{18\,k\,T\,\theta^2\,\epsilon^2} \tag{47}$$

जिनसे पता चलता है कि उच्च अंतःक्षेपण स्तर पर रव प्रत्यक्ष समानुपाती होता है धारा घनत्व के।

विवेचना

प्रस्तुत विश्लेषण में रोधी पदार्थ के लिए जो छिछले ट्रैपों से युक्त हैं और धारा-वोल्टता अभिलक्षणों के पूर्ण परास से निम्न आवृति पर वाहक संख्या उच्चावचनों के लिए वैश्लेषिक व्यंजक व्युत्पन्न किये गये हैं। पूर्ण रव स्पेक्ट्रम दिखलाता है कि निम्न आवृति रव धारा के उच्च अंतःक्षेपण स्तर पर अत्यधिक कम हो जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि डायोड में विद्यमान अवकाश आवेश द्वारा रव संदमित होता है।

निर्देश

1. हूगे, एफ० एन०, क्लाइनपेनिंग, टी० जी० एम० तथा वन्डाम्मे, एल० के० जे०, Rept. Prog. Phys. 1981, **44**, 479.

2. वानडर जील ए०, Fluctuation Phenomena in Semiconductors, London : Butterworths 1959.

3. लैम्पटे, एम० ए० तथा मार्क, पी०, Current injection in solids, Academic Press, New York 1970.

4. शर्मा, वाई० के०, Phys. Rev. 1974, **B10**, 3273.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

प्रतिचित्र के अनुक्रम का अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय

प्रतिमा रावत

गणित विभाग, डा० हरिसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जून 6, 1989]

सारांश

पूर्ण दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रों के अनुक्रम के लिए अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध किया जावेगा।

Abstract

A unique fixed theorem of sequence of maps. *By* Pratima Rawat, Department of Mathematics, Dr. H. S. Gour Viswavidyalaya, Sagar.

In the present note we shall prove unique fixed point theorem for sequence of maps in complete metric space which generalize the result of Pachapatte[1].

पचपट्टे ने [1] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है :

माना S तथा T किसी अरिक्त पूर्ण दूरीक समष्टि का आत्म-प्रतिचित्रण है जो निम्नलिखित असमिका की तुष्टि करता है .

$$\max\{[d(x, y)]^2, [d(x, Sx)]^2, [d(y, Ty)]^2, \tfrac{1}{2}[d(x, Ty)]^2$$

$$d(Sx, Ty) \leqslant q \frac{\frac{1}{2}[d(y, Sx)]^2\}}{[d(x, Sx)+d(y, Ty)]}$$

x में समस्त x, y के लिए जिसके लिए

$$d(x, Sx)+d(Y, Ty) \neq 0$$

$q \in (0, 1)$ तब S तथा T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है।

अब हम पूर्ण दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रणों के अनुक्रम के लिए एक प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय :

माना T_0 तथा $\{Tn : n \in I^+\}$ (I^+ धन पूर्णाङ्कों के सेट का द्योतक है) अरिक्त पूर्ण दूरीक समष्टि X का प्रतिचित्रण हो जिससे असमिका की स्वत:तुष्टि हो लें ।

$$\max \{[d(x, y)]^2, [d(x,Tx)]^2, [d(y, T_n y)]^2$$

$$\text{(i)} \qquad d(T_0x, T_ny) \leqslant q \frac{1/2\,[d(x, T_ny]^2, 1/2[d(y, T_0x)]^2\}}{[d(x, T_0x)+d(y, T_ny)]}$$

x में संमस्तw, y के लिए। प्रत्येक $n=1, 2.....$जिसके लिए $d(x, T_0x)+d(y, T_ny)\neq 0$, $q\in(0, 1$ तो X में ऐसा विन्दु Z विद्यमान रहता है जिससे $T_nz=z$ जो प्रत्येक $n=0, 1, 2,.....$के लिए तथा याद्दच्छिक $x_0\in X$, के लिए अनुक्रम x_0, $x_n=T_0x_0$, $x_2=T_1x_1$, $x_3=T_0x_2.....x_{2n-1}=T_0x_{2n-1}$, $x_{2n}=T_nx_{2n-1}$, $x_{2n+1}=T_0x_{2n}$, अभिसरण करता है z में और यदि $d(x, T_0x)+d(y, T_ny)=0$, तो z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है T_n का $n=0, 1, 2.....$के लिए ।

उपपत्ति :

सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि (ii) द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{xn\}$ कौशी अनुक्रम है । (i) से $x=x_{2n-2}$ तथा $y=x^2{}_{n-1}$ के लिए हमें

$$d(x_{2n-1}, x_{2n})=d(T_0x_{2n-2}, T_nx_{2n-1})$$

$$\max \{[d(x_{2n-n}, x_{2n-1}]^2, [d(x_{2n-2}, x_{2n-1}]^2, [dx_{2n-1}, x_{2n})]^2,$$

$$\leqslant q \frac{1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n})]^2, 1/2[d(x_{2n-1}, x_{2n-1})]^2\}}{d(x_{2n-2}, x_{2n-1})+d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

$$\max \{[d_{2n-2}, x_{2n-1})]^2, [d(x_{2n-2}, x_{2n-1})]^2$$

$$\leqslant q \frac{[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2, 1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n-1})[^2+d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2\}}{d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

प्राप्त होता है जव

$$x_n\ (x_{2n+1}) \qquad \text{(iii)}$$

यदि सम्भव हो तो (iii) के दायें पक्ष को $[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2$ हो जाय तो (iii) से हमें

$$[d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q \frac{[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2}{[d(x_{2n-2}, x_{2n-2})+d(x_{2n-1}, x_{2n})]}$$

अथवा

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q d(x_{2n-1}, x_{2n})$$

एक विरोध प्राप्त होता है जिससे

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \nless d(x_{2n-1}, x_{2n}) \qquad \text{(iv)}$$

यदि सम्भव हो तो माना कि

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant \frac{1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2}{d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

$$< \tfrac{1}{2}[d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})]$$

अथवा

$$d(x_{2n-2}, x_{1n-1}) < d(x_{2n-1}, x_{2n})$$

जो (iv) से सम्भव नहीं। अत: (iii) से हमें

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q d(x_{2n-2}, x_{2n-1}).$$

प्राप्त होता है। इसी तरह हम दिखला सकते हैं कि

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) = d(T_n x_{2n-3}, T_0 x_{2n-2})$$

$$\leqslant q d(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

इसी विधि से अग्रसर होने पर

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q d(x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

$$\leqslant q^2 d(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q^{2n-1} d(x_0, x_1)$ समस्त $n=1, 2, \ldots\ldots$के लिए। परिगणनों से हम यह दिखला सकते हैं कि $k>n$ के लिए निम्नलिखित असमिकायें लागू होती हैं—

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} d(x_{2+i-1}, x_{n+i})$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-1} d(x_0, x_1)$$

$$\leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0 . x_1)$$

चूंकि $q<1$. उपर्युक्त असमिका का दाँया पक्ष ज्यों ज्यों $n\to 0$ त्यों त्यों शून्य के निकट पहुँचता है अतएव अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है ।

चूंकि X पूर्ण है अत: X में एक ऐसा बिन्दु z विद्यमान है जिससे कि

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z \tag{v}$$

(i) तथा त्रिकोणीय असमिका का उपयोग करने पर यदि $z\neq T_0 z$ तो हमें

$$d(z, T_0z)\leqslant d(z, x_{2n})+d(x_{2n}, T_0z)$$

$$\leqslant d(z, p_{2n})+d(T_0z, T_nx_{2n-1})$$

$$\max\{[d(z, x_{2n-1})]^2, [d(z, T_0z)]^2, [d(x_{2n-1}, T_nx_{2n})]^2$$

$$\leqslant d(z, x_{2n})+q\,\frac{1/2[d(z, T_nx_{2n-1})]^2,\ 1/2[d(x_{2n-1}, T_0z)]^2\}}{[d(z, T_0z)+d(x_{2n-1}, T_nx_{2n-1})]}$$

$$\max\{[d(z, x_{2n-1})]^2, [d(z, T_0z)]^2, [d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2$$

$$\leqslant d(z, x_{2n})+q\,\frac{1/2[d(z, x_{2n})]^2,\ 1/2]d(x_{2n-1}, T_0z)]^2\}}{[d(z, T_0z)+d(x_{2n-1}, x_{2n})]}$$

प्राप्त होगा । अब $n\to\infty$ तथा (v) से हमें विरोध अर्थात् $d(z, T_0z)=0$, प्राप्त होता है जिसका अर्थ है $T_0z=z$.

अब हम विचार करेंगे कि $z\neq T_nz$, तब

$$d(z, T_nz)=d(T_0z, T_nz)$$

$$\leqslant q\,\frac{\max\{(dz, z)]^2, [d(z, T_0z)]^2, [d(z, T_nz)]^2, 1/2\,[d(z, T_nz)]^2, 1/2[d(z, T_0z)]^2\}}{[d(z, T_0z)+d(z, T_nz)]}$$

$$\leqslant q\,\frac{\max\{[d(z, T_nz)]^2, 1/2\,[d(z, T_nz)]^2\}}{d(z, T_nz)}$$

$$\leqslant q\max[d(z, T_nz)],$$

विरोध है । अतः इससे यह निकलता है कि $z=T_nz$. अब z की अद्वितीयता सिद्ध करने के लिए कल्पना करें कि ऐसा अतिरिक्त विरोध कि $d((x, T_0x)+d(y, T_ny)=0$ का अर्थ है $d(T_0x, T_ny)=0$ तथा मान लें कि T_n का X में अन्य स्थिर बिन्दु $w(w\neq z)$ है ।

$d(z, T_0z)+d(z, T_nw)=0$ का अर्थ होगा $d(T_0z, T_nw)=0$

अतएव $$d(z, w)=d(T_0z, T_nw)=0$$

जिसका अर्थ है कि $z=w$. अतः इससे यह निकला कि z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है T_n का।

टिप्पणी :

यदि हम $T_n=T$ तथा $T_0=S$ रखें तो हमें पचपट्टे का परिणाम प्राप्त होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका गणित विभाग के अध्यक्ष प्रो० पी० एल० शर्मा के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करती है जिन्होंने यह शीर्षक सुझाया और इस प्रपत्र के लिखने में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. पचपट्टे, बी० जी०, Indian J. Pure appl. Math., 1979, **10**, 1362-1368.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No.1, 1990

पूर्ण दूरीक समीष्ट में बहुमान वाले संकुचन प्रतिचित्रण

के० कुरेशी तथा आर० के० पाण्डेय
गणित विभाग, शासकीय पोस्टग्रैजुएट कालेज, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 3, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पूर्ण दूरीक समष्टि में बहुमान वाले प्रतिचित्रण के लिए स्थिर प्रमेय सिद्ध किया गया है

Abstract

Multivalued contraction mappings in complete matric spaces. *By* K. Qureshi and R. K. Pande, Department of Mathematics, Government Post Graduate College, Narsinghpur, (M. P.).

In this paper we shall prove a fixed point theorem for multivalued contraction mappings in complete metric space.

माना कि (X, d) दूरीक समष्टि है। किसी X के किसी अरिक्त सबसेट AB के लिए हम परिभाषित करते हैं

$$D(A, B)=\inf \{d(a, b) \mid a\in A, b\in B\},$$

$$\delta(A, B)=\sup\{d(a, b) \mid u\in A, b\in B\},$$

$$H(A, B)=\max \{\sup \{D(a, B) \mid a\in A\}, \sup \{D(A, b)\mid b\in B\}\}.$$

माना $BN(X)$ X के समस्त अरिक्त बद्ध सबसेट का सेट है। समष्टि $BN(X)$ ऊपर परिभाषित दूरी H के प्रति दूरीक समष्टि है (देखें कुरैटोव्सकी [2], पृष्ठ 214)

ईसेकी[1] ने राइख[3] के परिणाम का सार्वीकरण निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करते हुए किया है।

प्रमेय 1. माना (X, d) कि पूर्ण दूरीक समष्टि है । यदि $f: X \to BN(X)$ एक बहुमूल्य वाला फलन हो जिससे X में प्रत्येक x, y के लिए

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))]$$

$$+\beta[H(x, f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x; y),$$

की तुष्टि होती हो जहाँ α, β, γ अनृण हैं तथा $2\alpha + 4\beta + \gamma < 1$, तो f का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है, अर्थात् किसी x' के लिए $(x') = \{x'\}$.

प्रस्तुत प्रपत्र में पूर्ण दूरीक समष्टि में हम बहुमान वाले प्रतिचित्रण के लिए स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध करेंगे । इस तरह प्राप्त प्रमेय राइख[3] तथा ईसेकी[1] सार्वीकरण होता है ।

प्रमेय 2. माना (X, d) पूर्ण दूरीक समष्टि है । यदि $f: X \to BN(X)$ एक बहुचरीय फलन हो जिससे X में प्रत्येक x, y के लिए $x \# y$ होने पर

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))]$$

$$+\beta[H(x, f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x, y)$$

$$+\eta\left[\frac{(H(x, f(y))d(x, y))}{(d(x, y) + d(y, f(y)))}\right]$$

की तुष्टि होती है जहाँ α, β, γ तथा η अनृण है तथा

$$2\alpha + 4\beta + \gamma - \eta < 1,$$

तब f का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है अर्थात् कुछ x' के लिए $f(x') = \{x'\}$

उपपत्ति : यदि $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 0$, तो परिणाम नगण्य होता है । हम कल्पना करते हैं कि $0 < 2\alpha + 4\beta + \gamma + \eta$ । अब $p = (2\alpha + 4\beta + \gamma + \eta)^{1/2}$. लें तो $p < 1$. अतः एकाकी मान वाला फल $g: X \to X$ होता है कि $g(x)$ एक बिन्दु y है $f(x)$ में जो निम्नलिखित की तुष्टि करता है

$$d(x, y) = d(x, g(x)) \geqslant pH(x, f(x))$$

g जैसे फलन के लिए

$$d(g(x), g(y)) \leqslant \delta(f(x), f(y))$$

$$\leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))$$

$$+\beta[H(x) f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x, y)]$$

$$+\eta\left[\frac{(H(x, f(y))d(x, y))}{(d(x, y)+d(y, f(y)))}\right]$$

$$\leqslant \alpha p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+\beta p^{-1}[2d(x, y)+d(x, g(x))+d(y,g(y))]+\gamma d(x, y)$$

$$+\eta p^{-1}\left[\frac{(d(x, y)+d(y,g(y)d(x,y)}{(d(x, y)+d(y, g(y))}\right]$$

$$\leqslant(\alpha+\beta)p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+(2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma)d(x, y).$$

अतएव

$$d(g(x), g(y))\leqslant(\alpha+\beta)p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+(2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma)d(x, y).$$

यह कल्पना कि $2\alpha+4\beta+\beta+\gamma+\eta<1$ बतलाती है कि $2(\alpha+\beta)p^{-1}+2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma<1$। विख्यात प्रमेय के अनुसार g का स्थिर बिन्दु x' है अर्थात् $g(x')=x'$.

बिन्दु x' के लिए

$$o=d(x', g(x'))\geqslant pH(x', f(x')).$$

अतएव

$$x'\epsilon f(x').$$

यदि $z\epsilon f(z)$, तथा $H(z, f(z))>0$,

तो

$$\delta(f(y), f(y))\leqslant 2(\alpha+\beta)H(y, f(y))<H(y, f(y)),$$

जो असम्भव है। अत:

$$f(z)=\{z\}.$$

$z=x'$ दिखाने के लिए, निम्नलिखित पर विचार करें

$$\delta(f(z), f(x'))\leqslant\beta[H(z, f(x'))+H(x', f(z))]$$

$$+\gamma d(z, x')+\eta H(z, f(x'))$$

$$\leqslant(2\beta+\gamma+\eta)d(z, x')$$

अत: $z=x'$ प्राप्त होता है जो यह दिखलाता है कि f का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है। इस तरह प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी होती है।

निर्देश

(1) ईसेकी, के०, Mathematics Seminar Notes, 1974, **2**, 45-51.

(2) कुरैटोव्स्की, के०, Topology 1 PWN, Wasazawa, 1966.

(3) राइख, एस०, Bull. Un. Mat. Ital., 1972, (**4**)5, 26-42.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

फूरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता

वेद प्रकाश, एस० के० वर्मा तथा ए० के० दलेला
शासकीय माडल साइंस कालेज, जबलपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 8, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हालैंड, साहनी तथा जिम्बालारिया[2] द्वारा प्रदत्त प्रमेय का सार्वीकरण करना है।

Abstract

On Taylor summability of Fourier series. *By* Ved Prakash, S. K. Verma and A. K. Dalela, Government Model Science College, Jabalpur (M. P.).

The aim of the present paper is to generalize the theorem given by Holland, Sahney and Tzimbalario[2] in the present form.

Theorem : If

$$\int_0^t |\phi(u)|=0\ (t^{\Delta}),\ \Delta\geqslant 1$$

and

$$\int_{\{(1-\nu)_{\pi/n}\}^{1/a}}^{n} \frac{|\phi(t)-\phi(t+(1-\gamma)\ \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{-2(1-\gamma)^2}\right) dt=0$$

wheren is a positive constant, then the Fourier series of f is Taylor summable to S at point x

1. माना कि $\{a_{n,\,k}\}$ एक मैट्रिक्स है जिसे

$$\frac{(1-\gamma)^{n+1}\ \theta^n}{(1-\gamma\theta)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k} a_{n,\,k}\ \theta^k. \tag{1.1}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है क्योंकि $|\gamma\theta|<1$, n पूर्णांक है >0.

माना यदि $f(x) \in L(0, 2\pi)$ तथा इस अन्तराल के बाहर आवर्त 2π के साथ आवर्ती हो। माना कि फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी को

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(X) \tag{1.2}$$

तथा

$$\phi(t) = 1/2 \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \tag{1.3}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ S एक अचर है।

2. परिभाषा

माना कि

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

एक दी हुई श्रेणी है और माना कि

$$s_k = \sum_{m=0}^{k} c_m$$

इस श्रेणी को टेलर समाकलनीय कहा जाता है यदि

$$\sigma_n^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} s_k$$

सान्त सीमा S की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $n \to \infty$.

जहाँ

$$0 \leqslant \gamma < 1. \tag{2.1}$$

3. हाल ही में हालैंड, साहनी तथा जिम्बालारियो[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय A. यदि

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0(t) \quad \text{ज्यों ज्यों } t \to 0^+ \tag{3.1}$$

तथा

$$\int_{(1-\gamma)\pi/n}^{\pi} \frac{|\phi(t) - \phi(t + (1-\gamma))\, \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right) dt = 0 \tag{3.2}$$

जहाँ η धन अचर है तब f की फूरियर श्रेणी x बिन्दु पर S तक टेलर समाकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0(t^{\Delta}),\ \Delta \geqslant 1 \tag{3.3}$$

तथा

$$\int_{\{(1-\gamma)\ \pi/n\}^{1/\Delta}}^{n} \frac{|\phi(t)-\phi(t+(1-\gamma)\ \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right) dt = 0 \tag{3.4}$$

जहाँ η धन अचर है तो f की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर S तक टेलर समाकलनीय है।

अब हम $1-\gamma\, e^{it} = \rho\, e^{-\theta i}$ लिखेंगे।

अपने प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

$$\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^n \leqslant e^{-Ant^2},\ A>0,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2 \tag{3.5}$$

प्रमेयिका 2

$$\left|\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^n - \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\right| \leqslant Bnt^4 \tag{3.6}$$

प्रमेयिका 3 : B अचर है, $t>0$

$$\left|\theta - \frac{\gamma t}{1-\gamma}\right| \leqslant ct^3, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2, \tag{3.7}$$

c अचर है।

4. प्रमेय की उपपत्ति

यह सुविदित है कि

$$s_k - s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sin kt\, dt + 0(1) \tag{4.1}$$

अतः $\{s_k - s\}$ का टेलर रूपान्तर (4.2)

$$\sigma_n^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,\,k}\,(s_k - s)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,\,k} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sin kt \, dt + 0(1) \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \, I_m \, \Sigma a_{n,\,k} \, e^{ikt} \, dt + 0(1) \tag{4.2}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $I_m \, e^{ikt} = \sin kt$ (क्योंकि यह श्रेणी समान रूप से अभिसारी है) अर्थात् e^{ikt} का काल्पनिक अंश

$$= I + 0(1) \qquad \text{माना}$$

जहाँ

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \, I_m \left\{ \frac{(1-\gamma)^{n+1} \, e^{int}}{(1-\gamma \, e^{it})^{n+1}} \right\} dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \, I_m \left\{ \frac{(1-\gamma)^{n+1} \, e^{int}}{\rho^{n+1} \, e^{-i(n+1)\theta}} \right\} dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \left(\frac{1-\gamma}{\rho} \right)^{n+1} \sin \{nt + (n+1)\theta\} \, dt$$

अब हम लिखेंगे

$$q = \frac{1}{1-\gamma}, \quad a(n) = \frac{\pi}{qn}, \quad b(n) = \left(\frac{\pi}{qn} \right) \frac{\alpha}{\Delta}$$

जहाँ

$$\frac{1}{3} < \frac{\alpha}{\Delta} < \frac{1}{2}.$$

अत:

$$I = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{a(n)} + \int_{a(n)}^{b(n)} + \int_{b(n)}^{\pi} \right] \frac{\phi(t)}{t} \left(\frac{1-\gamma}{\rho} \right)^{n+1} \cdot \sin \{nt + (n+1)\theta\} \, dt$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \qquad \text{माना} \tag{4.3}$$

आइये I_1 पर विचार करें क्योंकि $(1-\gamma) \leqslant \rho$, प्रमेयिका 3 के प्रयोग से

$$|I_1| \leqslant 0(1) \int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t} \{nt + (n+1)\,\theta\} \, dt$$

$$= 0(1) \int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ nt + (n+1) \left(ct^3 + \frac{\gamma t}{1-\gamma} \right) \right\} dt$$

$$= 0(1) \int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t} \left[\left(n + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) t + (n+1)\, ct^3 \right] dt$$

$$=0(n)\left[\int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t}\, dt+\int_0^{a(n)} \phi(t)\, t^2\, dt\right] \quad (3.3) \text{ के प्रयोग से}$$

$$=0(1). \tag{4.4}$$

I_3 पर प्रमेयिका 1 का उपयोग करते हुए विचार करें। तब टिश्मार्श[1] के द्वितीय माध्यमान प्रमेय के उपयोग से

$$I_3 \leqslant 0(n^{\alpha/\Delta}) \exp\left(-A(u+1)\left(\frac{\pi}{qn}\right)^{2\alpha/\Delta} \int_{b(n)}^{\pi} |\phi(t)|\, dt\right.$$

$$=0(1). \tag{4.5}$$

अब I_2 पर विचार करें

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{(b(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^{n+1} \sin\{nt+(n+1)\,\theta\}\, dt$$

प्रमेयिका 2 के सम्प्रयोग से

$$I_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left\{B(n+1)\, t^4+\exp\left(\frac{-(n+1)\,\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\right\}$$

$$\cdot \sin\{nt+(n+1)\,\theta\}\, dt \tag{4.6}$$

$$=I_{2\cdot 1}+I_{2\cdot 2}, \qquad \text{माना}$$

जहाँ

$$I_{2\cdot 1}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \phi(t)\, B(n+1)\, t^3 \sin\{nt+(n+1)\,\theta\}\, dt$$

$$=0(n)\, 0\left(\left(\frac{1}{qn}\right)\frac{3\alpha}{\Delta}\right)\int_{a(n)}^{b(n)} |\phi(t)|\, dt$$

$$=0(1). \tag{4.7}$$

तथा

$$I_{2\cdot 2}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\phi(t)}{t} \exp\left(\frac{-(n+1\gamma t^2)}{2(1-\gamma)^2}\right) \sin\{nt+(n+1)\,\theta\}\, dt \tag{4.8}$$

अब

$$\sin\{nt+(n+1)\,\theta\}=\sin(n+1)\,(t+\theta)\cos t-\cos(n+1)\,.\,(t+\theta)\sin t$$

$$=\sin(n+1)\,(t+\theta)+0(t^2)+0(t)$$

लें जिससे कि

$$\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{|\phi(t)|}{t} 0(t)\, dt=0(1)$$

जब हम (4.8) में nt के स्थान पर $(n+1)t$ लिखते हैं। इसी तरह हम

$$\exp\left[\frac{-(n+1)\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right]$$

में हर $(n+1)$ के स्थान n लिख सकते हैं। यदि

$$I_{2\cdot 2,\,1}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{\phi(t)}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\sin n(t+\theta)\,dt \tag{4.9}$$

तो

$$I_{2\cdot 2}=I_{2\cdot 2,\,1}+0(1)$$

चूँकि

$$|\sin n(t+\theta)-\sin\frac{nt}{1-\gamma}|\leqslant n\,|t+\theta-\frac{t}{1-\gamma}|$$

$$=n|\theta\frac{-\gamma t}{1-\gamma}|,\quad \text{प्रमेयिका 3 से}$$

$$\leqslant nct^3,\ 0\leqslant t\leqslant\pi$$

तो

$$\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{|\phi(t)|}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)cnt^3\,dt$$

$$=0(n)\,0\left(\left(\frac{1}{n}\right)\frac{2\alpha}{\Delta}\right)\int_{a(n)}^{b(n)}|\phi(t)|\,dt$$

$$=0(1)$$

फलस्वरूप

$$I_{2\cdot 2,\,1}=I_{2\cdot 2,\,2}+0(1)$$

जहाँ

$$I_{2\cdot 2,\,2}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{\phi(t)}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\sin nt\,dt \tag{4.10}$$

अब हमें (4.11) प्राप्त होगा

$$I_{2\cdot 2,\,2}=0(1). \tag{4.11}$$

इस तरह (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) एवं (4.11) के मिलाने से प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

निर्देश

1. टिशमार्श, ई० सी०, A Theory of Functions, आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, 1952

2. हालैंड, ए० एस० बी०, साहनी, एस० एन० तथा जिम्बालारियो, जे०. Boll. Un. Mat. Ital, 1975.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर पर कुछ प्रमेय-II

एस० एन० सिंह
गणित विभाग, नेशनल यूनिवर्सिटी आफ लसोथो (अफ्रीका)

[प्राप्त-मार्च 13, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर सम्बन्धी कुछ प्रमेयों की स्थापना की है। इन प्रमेयों पर आधारित उदाहरणों की भी स्थापना की गई है।

Abstract

Some theorems on the generalized miltiple transform-II. *By* S. N. Singh, Department of Mathametics, National University of Lesotho, Lesotho, Africa.

In this paper, we have established some theorems on the generalized multiple transforms. These theorems have been used frequently to evaluate many known and unknown integrals involving the product of H-function and other special functions. Examples based upon these theorems have also been established.

1. प्रस्तावना

हम सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर को निम्नलिखित रूप में परिभाषित करते हैं—

$$\phi(t)=MT[f(x_1, x_2\ldots,x_r)]=\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma} \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1}$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[t_1 x\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(A_u, \eta_u)\}\\ \{(B_v, \xi_v)\}\end{matrix} \right]$$

$$H_{p,q}^{m,u}\left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/u_j)^{\rho_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix}\{(c_p, \gamma_p)\}\\ \{(d_q, \delta_q)\}\end{matrix} \right].$$

$$f(x_1, x_2..., x_r) \prod_{j=1}^{r} dx_j \tag{1.1}$$

बशर्ते कि

$$\leqslant m \leqslant q,\ o \leqslant n \leqslant p,\ o \leqslant f \leqslant v,\ o \leqslant g \leqslant u\ R(a_j),$$

$R(\beta_j)>0,\ (j=1, 2,..., r);\ \sigma_1, \sigma_2>0;\ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}>0;$ प्रत्येक

$x_j>0, (j=1, ,..., r);\ |\arg|<\frac{1}{2} U\pi,\ U>0$ जहाँ

$$U=\sum_{j=1}^{f} \xi_j - \sum_{j=f+1}^{v} \xi_j + \sum_{j=1}^{g} \eta j - \sum_{j=g+1}^{u} \eta_j$$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha j}{p_j}\right)<-\beta;\ \delta=\min R(B_j/\xi_j),\ (j=1, 2,...,f)$$

$\beta=\max R\left(\frac{A_i-1}{\eta_i}\right),\ (1=1, 2,...,g)$ तथा $f(x_1, x_2..., x_r)$ ऐसा है कि बहुगुण रूपान्तर का अस्तित्व रहता है।

हमने (1.1) में कथित सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर तथा विभिन्न ज्ञात रूपान्तरों के बीच सम्बन्ध स्थापित किया है। प्रमेय को सिद्ध करते समय हमने $f(x_1, x_2,..., x_r)$ के स्थान पर $f(x_1)$ का प्रयोग किया है।

1. प्रमेय

यदि

$$\phi(t)=HT\,[f(x_1)] \tag{2.1.1}$$

तथा

$$g(t)=H_v[f(x_1)] \tag{2.1.2}$$

तब

$$\phi(t)=\prod_{j=1}^{r} \frac{a_j^{\alpha_j}}{p_j} \frac{a_1^{\nu+1/2}}{\sigma_1 2^{\nu}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N \Gamma(-\nu-N)}{N!\Gamma(-\nu-N-\frac{1}{2})\Gamma(\nu+N+3/2)} \lambda^{-k}.$$

$$H_{p+r+v,q+u+1}^{m+g,r+n+f}\Bigg[t \sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-k'} \Bigg| \left(1-\frac{\alpha_1+v+2N+1/2}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1} \right),$$

$$\{(d_m, \delta_m)\},$$

$$\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2} \right),\ldots, \left(1-\frac{\alpha_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r} \right), \{(c_n, \gamma_n)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u, K'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}),\ldots$$

$$\{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_u)\}, (c_{n+1}, \gamma_{n+1}),\ldots, (c_p, \gamma_p)$$

$$(d_q, \delta_q), (1+\sigma-K'\sigma_1 K\sigma_1-\sigma_2) \Bigg] .$$

$$\int_0^\infty Z_1^{v+1/2+2N} g(z_1)dz_1. \tag{2.1.3}$$

बशर्ते कि

$$K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma=\frac{\alpha_1+v+2N+1/2}{p_1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right).\ K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j}{p_j}\right);$$

$\sigma_1, \sigma_2>0$; $R(\alpha_j), R(\beta_j)>0$, $(j=1, 2,..., r)$; प्रत्येक $x_j>0$

$$(j=1, 2,..., r); \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}>c; |R(v)|<\tfrac{1}{2};$$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{\alpha_1+v+1/2}{p_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right)<-\beta, |\arg\lambda|<\tfrac{1}{2}U\pi,$$

$U>0$ जहाँ $U, \delta=\beta$ प्रसाद तथा सिंह[3] द्वारा प्रदत्त हैं तथा समाकल

$$\int_0^\infty x_1^{v+1/2+N} d(x)dz_1,\ N\geqslant 0,$$

का अस्तित्व है।

उपपत्ति :

प्रमेय के कथन से यह निगमित होता है कि

$$g(t)=\int_0^\infty (x_1 t)^{1/2} H_v(x_1 t) f(x_1)\, dx_1, \tag{2.1.4}$$

जहाँ

$$R(t)>0;\ |R(v)|<\tfrac{1}{2}.$$

टिश्मार्श[4] के विलोमन सूत्र द्वारा हमें

$$f(t)=\int_0^\infty (x_1\,t)^{1/2}\,Y_\nu(z_1\,t)g(z_1)dx_1. \tag{2.1.5}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$R(t)>0;\ |R(\nu)|<\tfrac{1}{2}$$

(2.1.1) में (2.1.5) को प्रतिस्थापित करने तथा कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\phi(t)=\int_0^\infty x_1^{1/2}\,g(z_1)dz_1\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{1/2}\prod_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1}\,Y_\nu(x_1z_1)$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma}H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(A_u,\ \eta_u)\}\\ \{(B_v,\ \xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t\sum_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma_2}\middle|\begin{matrix}\{(\sigma_p,\ \gamma_p)\}\\ \{(d_q,\ \delta_q)\}\end{matrix}\right]\prod_{j=1}^{r}dx_j \tag{2.1.6}$$

(2.1.6) में

$$Y_\nu(x_1\,z_1)=H_{1,3}^{2,0}\left[\frac{x_1^2\,z_1^2}{4}\middle|\begin{matrix}\left(-\frac{\nu+1}{2},\ 1\right)\\ (\pm\tfrac{1}{2}\nu,\ 1),\left(-\frac{\nu+1}{2},1\right)\end{matrix}\right].$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\Gamma(-\nu-N)}{N!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+N\right)\Gamma(-\nu-\frac{1}{2}-N)}(\tfrac{1}{2}x_1\,z_1)^{\nu+2N} \tag{2.1.7}$$

रखने पर, जहाँ $-\frac{1}{2}<R(\nu)<0$ तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर, जो कि कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$\phi(t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\,\Gamma(-\nu-N)}{N!\,2^{\nu+2N}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+N\right)\Gamma(-\nu-\frac{1}{2}-N)}.$$

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{\nu+1/2+2N}\sum_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^{\sigma}$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(P_u,\eta_u)\}\\ \{(B_v,\xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\gamma_p)\}\\ \{(d_q,\delta_q)\}\end{matrix}\right]\prod_{j=1}^{r}dx_j$$

$$\int_0^\infty x_1^{v+1/2+2N}g(z_1)dz_1$$

अन्त में, प्रसाद तथा सिंह[3] के बहुगुण समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय प्राप्त हो जाती है बशर्ते कि (2.1.3) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1)=z_1^{\frac{v-1}{2}}e^{z_1^2/2b}W_{v/4,\ v/4+\frac{1}{2}}\left(z_1^2/b^2\right)$$

तो एर्डेल्यी [1, (24) p. 167], के अनुसार

$$f(x_1)=\frac{\pi^{1/2}b^{v/2+1}x^{1/2}\exp\left(\frac{b^2x_1^2}{8}\right)K_{v/2}\left(\frac{b^2x_1^2}{8}\right)}{\cos\left(\frac{v}{2}\pi\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}v\right)} \tag{2.1.8}$$

जहाँ

$$|\arg b|<\tfrac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}<R(v)|<0.$$

अपरंच, एर्डेल्यी [2, (7) p. 336], के अनुसार हमें

$$\int_0^\infty z_1^{v+1/2+2N}g(z_1)dz_1=\tfrac{1}{2}b^{\frac{3v}{2}+1+2N}\Gamma(v+\tfrac{1}{2}+N)$$

$$B\left(\frac{v+1}{2}+N,\ -v-\tfrac{1}{2}+N,\right) \tag{2.1.9}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$|<\arg b|<\frac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}<R(v)<0.$$

अतः प्रमेय के द्वारा हमें

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} \exp\left(\frac{b^2 x_1^2}{8}\right) K_{v/2}\left(\frac{b^2 x_1^2}{8}\right)$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left[\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right]^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(a_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j} a_1^{v+1/2} b^v \cos(\frac{1}{2}v\pi)\, \Gamma(-v/2)}{\prod_{j=1}^{r} p_j\, \sigma_1\, \pi^{1/2}\, 2^{v+1}}$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N b^{2N} \Gamma(v+\frac{1}{2}+N) a_1^{2N}}{N!\, \Gamma(v-\frac{1}{2}-N)\, 2^{2N}\, \Gamma(v+3/2+N)} B\left(\frac{v+1}{2}+N,\ -v-\tfrac{1}{2}-N\right).\ \lambda^{-K}.$$

$$H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f}\left[t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha_1+v+\frac{1}{2}+2N}{p_1},\ \frac{\beta_1}{p_1}\right),\ \left(1-\frac{\alpha_2}{p_2},\ \frac{\beta_2}{p_2}\right) \\ \{(d_m, \delta_m)\},\ \{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \cdots \left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\ \frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{(c_n, \gamma_n)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},\ (d_{m+1}, \sigma_{m+1}), \cdots (d_q, \delta_q) \\ (\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}) \cdots\cdots, (\sigma_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix} \right] \qquad (2.1.10)$$

प्राप्त होता बशर्ते

$$|\arg b| < \frac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2} < R(v) < R(v) < 0$$

तथा (2.1.3) में दिये गये सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

प्रमेय 2.

यदि

$$\phi(t) = NT[f(x_1)], \qquad (2.2.1)$$

तथा

$$g(t)=Y_v[f(y_1)], \tag{2.2.2}$$

तो

$$\phi(t)=\frac{a_1^{v+3/2}\prod_{j=1}^{r}a_j^{\alpha_j}}{\sigma_1\prod_{j=1}^{r}p_j}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N a_1^{2N}}{N!\,2^{2N}\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)}\lambda^{-K}$$

$$H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f}\left[t\sum_{j=1}^{r}a_j^{\beta_j}\lambda^{-K'}\middle|\begin{matrix}\left(-\frac{\alpha_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right).\\ \{(d_m,\delta_m)\},\end{matrix}\right.$$

$$\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2},\frac{\beta_2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{(a_n,\gamma_n)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v-K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\},\ (m+1,\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix}(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p)\\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_1)\end{matrix}\right]\int_0^{\infty}x_1^{v+3/2+2N}\,g(z_1)dz_1, \tag{2.2.3}$$

बशर्ते कि

$$K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\frac{\alpha_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right):K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\alpha_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j}{p_j}\right);$$

$\sigma_1,\ \sigma_2\geqslant 0,\ R(\alpha_j),\ R(\beta_j)>0,\ (j=1,\ 2;\ldots,r)$; प्रत्येक $x_j>0$,

$(j=1,\ 2,\ldots,\ r);\ \sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}>0;\ |R(v)|<\frac{1}{2};$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{\alpha_1+v+3/2}{p_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right)<-\beta;\ |arg\ \lambda|<\tfrac{1}{2}U\pi,$$

$U>0$ जहाँ $U,\ \delta,\ \beta$ प्रसाद तथा सिंह[3] द्वारा प्रदत्त हैं और समाकल

$$\int_0^{\infty}z_1^{v+3/2+2N}\,g(z_1)dz_1,\ N\geqslant 0$$

का अस्तित्व है।

उपपत्ति

प्रमेय की परिभाषा से

$$g(t)=\int_0^\infty (tx_1)^{1/2}\, Y_v(tx_1)\, f(x_1)\, dx_1 \tag{2.2.4}$$

जहाँ

$$R(t)>0:\ |R(v)|\ \tfrac{1}{2}.$$

टिश्मार्श[7] के विलोमन सूत्र से

$$f(t)=\int_0^\infty (tz_1)^{1/2}\, H_v(tz_1)\, \overline{g(z_1)}\, dz_1,$$

जहाँ

$$R(t)>0;\ |R(v)<\tfrac{1}{2}.$$

(2.2.1) में $f(x_1)$ के लिए (2.2.5) से मान रखने तथा कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम को बदलने पर हम (2.2.6) की प्राप्ति होती है

$$\phi(t)=\int_0^\infty z_1^{1/2} g(x_1)dz_1 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{1/2} \sum_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1}\, H_v(x_1z_1)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (xj/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u,\ \eta_u)\} \\ \{(B_v,\ \xi_v)\} \end{matrix} \right].$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t \sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p,\ \gamma_p)\} \\ \{(d_q,\ \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j \tag{2.2.6}$$

$H_v(x_1z_1)$ के लिए (2.2.6) में श्रेणी प्रसार [1, *p.* 428] अर्थात्

$$H_v(x_1z_1)=\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N \left(\frac{x_1x_1}{1}\right)^{v+1+2N}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)} \tag{2.2.7}$$

का मान रखने पर तथा प्रस्तावित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर

$$\phi(t)=\frac{1}{z^{v+1}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2^{2N}\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)} \int_0^\infty z_1^{v+3/2+2N}$$

$$g(x_1)dx_1 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{v+3/2+2N} \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} \cdot$$

$$H_{u,v}^{f,g} \left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] \cdot$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \prod_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

उपर्युक्त व्यंजक में प्रसाद तथा सिंह[3] के द्वारा बहुगुण समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय प्राप्त होता है बशर्ते कि (2.2.3) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1)=z_1^{2\lambda_2} e^{1/2z_1} W_{k'\lambda_1}(z_1) \tag{2.2.8}$$

तो एर्डेल्यी [1, (24) p. 167] के अनुसार

$$f(x_1)=\frac{1}{2\lambda_1\Gamma_*(-k\pm\mu+\frac{1}{2})} g_{3,4}^{2,3}\left(\tfrac{1}{2} x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu-\lambda_1 \\ l, -k-\lambda_1-\frac{1}{2}, h\,b \end{matrix} \right) \tag{2.2.9}$$

जहाँ

$$h=\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2};\ k=-\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2};\ l=\tfrac{1}{2}v+3/2;\ R(v+2\lambda_1)>2|R(\mu)|-7/2;$$

$$R(2k+v+5\lambda_1)-\tfrac{1}{2};\ R(k+\lambda_1)<0.$$

अपरंच, एर्डेल्यी [2, [7) p. 336] के अनुसार

$$\int_8^\infty z_1^{v+2N+5/2-1} g(z_1)\,dx_1=\int_0^\infty z^{v+2N+5/2-1+2\lambda_1} e^{1/2z_1}.\ W_{k,\lambda_1}(z_1)dz_1$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+v+2_1\lambda+2+2N)}{\Gamma(-k+\mu+\frac{1}{2})}.\ B(-\mu+v\ +2\lambda_1+3+2N,$$

$$-v-2\lambda_1-k-5/2-2N), \tag{2.2.10}$$

बशर्ते कि

$$|R(\mu)|-\tfrac{1}{2}<R(v+2N+2\lambda_1+5/2)<-R(k).$$

(2.2.1) में (2.2.9) तथा (2.2.13) को प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} G_{3,4}^{2,3}\left(\tfrac{1}{2}x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu - \lambda_1 \\ l, -k-\lambda_1-1/2, h, k \end{matrix} \right)$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] H_{p,q}^{m,n}\left[t \left\{ \prod_{j=1}^{t} x_j^{\beta_j} \right\} \right.$$

$$\left. \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j} \lambda_1 \Gamma(-k-\mu+1/2)\ a_1^{v+3/2}}{\prod_{j=1}^{r} p_j\ \sigma_1\ 2^v}$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N}}{2^{2N}} \frac{\Gamma(\mu+v+2\lambda_1+2N)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)} B(-\mu+v+2\lambda_1+3+2N,$$

$$-v-2\lambda_1-k-\frac{5}{2}-2N)\lambda^{-K}.$$

$$H_{p+r+v,q+u+1}^{m+g,r+n+f}\left[t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1-A_u-K\eta_v, K'\eta_u)\}, \\ \left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right), \ldots, \left(1-\frac{\alpha_r}{p_r}\right), \{(c_n, \gamma_n)\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\}, \\ (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q), \\ \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_1) \end{matrix} \right], \qquad (.2.2.11)$$

बशर्ते कि

$$R(v+2\lambda_1) > 2|R(\mu)| = \frac{7}{2}; R(v+2\lambda_1-2N) <= \frac{1}{2};$$

$R(k+\lambda_1)<0$ तथा प्रसाद और सिंह[3] के प्रमेय 2 में दिये गये अन्य सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

प्रमेय 3

यदि

$$\psi(\omega)=L[\phi(t)], \tag{2.3.1}$$

$$\phi(t)=HT[f(x_1)]; \tag{2.3.2}$$

तथा

$$f(x_1)=H_v[g(z_1)]; \tag{2.3.3}$$

तो

$$\psi(\omega)=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j} a_1^{v+3/2}}{\prod_{j=1}^{r} p_j \omega\sigma_1 2^{v+1}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N}}{2^{2N}\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(v+3/2+N)} \lambda^{-K}$$

$$H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,r+n+f+1}\left[1/\omega \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} (0,1),\ \left(1-\frac{\alpha_1+v+3/2+2N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right) \{(c_n, \gamma_n)\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u, C'\eta)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}),\ldots,(d_q, \delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix} (c_{n+1}, \gamma_{n+1}),\ldots,(c_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix}\right] \int_0^{\infty} z_1^{v+3/2+2N} g(z_1)\, dz_1, \tag{2.3.4}$$

बशर्ते कि

$$R(\omega)>0;\ R\left(-v-\frac{3}{2}-2N\right)\neq 0$$

अथवा $N=0$ के लिए एक ऋण पूर्णांक तथा प्रमेय 2 के लिए दिये गये वैधता के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उपपत्ति

प्रमेय की परिभाषा से

$$\psi(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-\omega t}\,\phi(t)\, dt \tag{2.3.5}$$

(2.3.5) में (2.2.3) से $\phi(t)$ का मान रखने पर तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर

$$\psi(\omega)=\frac{\prod_{j=1}^{r} n_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j}\frac{a_1^{v+3/2}}{\sigma_1 2^{v+1}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N a_1^{2N}}{2^{2N}\Gamma(3/2+N)\Gamma(v+3/2+N)}\lambda^{-K}.$$

$$\int_0^\infty e^{-\omega t} H^{m+g,\ r+n+f}_{p+r+v,\ q+u+1}\left[t\sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\lambda^{-K'}\ \middle|\ \begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha_1+v+3/2+2N}{p_1},\ \frac{\beta_1}{p_1}\right)\\ \{(d_m,\delta_m)\},\end{matrix}\right.$$

$$\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2},\ \frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\ \frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{(c_n,\gamma_m)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\},\ (d_{m+1},\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix}(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma^p)\\ (1+\sigma-K\sigma_1,K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]dt\int_0^\infty z_1^{v+3/2+2N}\ g(z_1)\,dz_1 \qquad (2.3.6)$$

अन्त में निम्नलिखित ज्ञात परिणाम

$$\int_0^\infty e^{-ax} H^{m,n}_{p,q}\left[bx^\sigma\ \middle|\ \begin{matrix}\{(a,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right]dx$$

$$=1/a\ H^{m,n+1}_{p+1,q}\left[\ b/a^\sigma\ \middle|\ \begin{matrix}(o,\sigma),\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right] \qquad (2.3..7)$$

से आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर बशर्ते कि

$$\sigma>0;\ \sigma\delta+1>0;\ |\ azg\ b\ |<1/2\ \lambda'\pi,\ \lambda'>0,$$

हमें प्रमेय प्राप्त होता है बशर्ते कि उसमें दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हो।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1)=z_1^{2\lambda_1}\ e^{1/2z_1}\ w_{k,\lambda_1}(z_1) \qquad (2.3.8)$$

तो (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) से

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\omega t} \sum_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j) \right\}^{\sigma} G_{3,4}^{2,3} \left(1/2\, x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu-\lambda_1 \\ l, -k-\lambda, -1/2, h, k \end{matrix} \right)$$

$$H_{u,v}^{f,g} \left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] .$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j . dt$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{a_j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \frac{\lambda_1 \Gamma(-k-\mu+1/2)}{\omega\, 2^{v} \sigma_1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N} \Gamma(\mu+v+2\lambda_1+2+2N)_{\lambda-K}}{2^{2N} \Gamma(3/2+N)\, \Gamma(v+3/2+N)}$$

$$B(\sqrt{\mu}+2\lambda_1+3+2N,\ -v-2\lambda_1\ -k-5/2-2N).$$

$$H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f+1} \left[1/\omega \prod_{j=1}^{r} h_j^{\beta_j}\ \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} (0,1),\ \left(1-\frac{a_1+v+2N+3/2)}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right) \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right), \ldots, \left(1-\frac{a_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{a_n, \gamma_n\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\},\ (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q),$$

$$\left. \begin{matrix} (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix} \right] , \qquad (2.3.9)$$

जहाँ (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) में दिये हुए सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II Bateman Manuscript Project, McGraw Hill Book Co., New York, 1954.

तो (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) से

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\omega t} \sum_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j) \right\}^{\sigma} G_{3,4}^{2,3} \left(1/2\, x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu - \lambda_1 \\ l, -k-\lambda, -1/2, h, k \end{matrix} \right)$$

$$H_{u,v}^{f,g} \left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] .$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j . dt$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \frac{\lambda_1 \Gamma(-k-\mu+1/2)}{\omega\, 2^{v\sigma_1}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N} \Gamma(\mu+v+2\lambda_1+2+2N)_{\lambda^{-K}}}{2^{2N} \Gamma(3|2+N)\, \Gamma(v+3/2+N)}$$

$$B(\sqrt{\mu}+2\lambda_1+3+2N,\ -v-2\lambda_1-k-5/2-2N).$$

$$H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f+1} \left[1/\omega \prod_{j=1}^{r} h_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} (0, 1), \left(1 - \frac{\alpha_1 + v + 2N + 3/2)}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1} \right) \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left(1 - \frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2} \right), \ldots, \left(1 - \frac{\alpha_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r} \right), \{a_n, \gamma_n\}, \{(1 - B_v - K\xi_v, K'\xi_v)\},$$

$$\{(1 - A_u - K\eta_u, K'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q),$$

$$\left. \begin{matrix} (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (1 + \sigma - K\sigma_1, K'\sigma_1 - \sigma_2) \end{matrix} \right] , \qquad (2.3.9)$$

जहाँ (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) में दिये हुए सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II Bateman Manuscript Project, McGraw Hill Book Co., New York, 1954.

2. वही : Tables of Integral transforms, भाग I, Bateman Manuscript Project, Mc-Graw Hill Book Co., New York 1954.

3. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, एस० एन०, Indian J. Pure Appl. Math, 1977, **8(11)**, 1298.

4. टिश्मार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integral, द्वितीय मुद्रण, Oxford1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

Lip (α, p) वर्ग के फलन के सन्निकटन की कोटि

टीकम सिंह तथा मनोज सिंह

शासकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन तथा शासकीय पालीटेकनिक, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 23, 1989]

सारांश

वियुक्त रीज रूपान्तर का प्रयोग करते हुए संतत फलन के सन्निकटन पर प्रमेय को इसके फूरिये प्रसार द्वारा स्थापित किया गया है।

Abstract

A note on the degree of approximation to function belonging to class Lip (α, p) by (R, λn, 1) transforms. *By* Tikam Singh and Manoj Singh, Government Engineering College, Ujjain and Government Polytechnic, Ujjain.

A theorem on approximation to continuous function by its Fourier expansion is established using the discrete Riesz transform.

1. परिभाषा तथा संकेतन

माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। माना $\{\mu_n\}$ अनुक्रम है ऐसी धन संख्याओं का कि

$$\lambda_n=\mu_0+\ldots+\mu_n \to \infty, \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{1.1}$$

$(R, \lambda_n, 1)$ रूपान्तरों को

$$t_n=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\mu_k S_k \tag{1.2}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

यदि $\mu_n=1$, जिससे कि $\lambda_n=n+1$, तब $(R, \lambda_n, 1)$ आपरेटर[1] फेजर आपरेटरों में या $(C, 1)$ रूपान्तरों में[3] समानीत हो जाते हैं और हम $\lambda(t)=\lambda[t]$, लिखते हैं जहाँ $[t]$ सबसे बड़े पूर्णाङ्क को बतलाता है किन्तु t से बड़ा नहीं होता।

माना कि $f\in L\ (0, 2\pi)$ और 2π-आवर्ती है तथा माना कि इसकी फूरिये श्रेणी (1.3) द्वारा दी जाती है।

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t). \tag{1.3}$$

हम

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

लिखेंगे।

माना कि $f\in C\ (0, 2\pi)$ के सन्निकटन की कोटि, अर्थात् संतत फलन

$$E_n^*(f)=\|f(x)-T_n(f, x)\|=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-T_n(f, x)| \tag{1.4}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $T_n(f,x)n$ कोटि का त्रिकोणमितीय बहुपद है।

हम कहेंगे कि $f(x)\in$ Lip (α, p) यदि

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}=\phi(t)^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1,\ p\geqslant 1 \tag{1.5}$$

2. प्रस्तावना

खान[2] ने सन्निकटन की कोटि पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय : यदि $f(x)$ आवर्ती फलन हो तथा $0<\alpha<1$ के लिए वर्ग Lip (α, p) से सम्बन्धित हो तथा यदि अनुक्रम $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ अनृण, अवर्द्धमान हों तथा $R_{(\gamma)}/x^{\alpha}$ अवर्धमान हो तो

$$E_n^*(f)=\min\|f-t_n^{p,q}\|=0\,\frac{1}{n^{\alpha-1/p}}$$

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य उपर्युक्त परिणाम को वियुक्त रीज रूपान्तर $(R, \lambda_n, 1$ तक विस्तीर्ण करना है। वस्तुतः हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

3. प्रमेय

$f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ $0<\alpha\leqslant 1$, $p\geqslant 1$, के लिए हमारे पास

$$E_n^*(t)=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-t_n(f,x)|=0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\},$$

जहाँ $t_n(f, x)$ फूरिये श्रेणी (1.3) एवं $\{\mu_n\}\downarrow$ के लिए वियुक्त रीज रूपान्तर $(R, \lambda n, 1)$ है।

प्रमेय की उत्पत्ति

यह देखा जा सकता है कि[4,5]

$$f(x)-t_n(x)=\frac{1}{2\pi\lambda n}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\,dt.$$

$$|f(x)-t_n(x)|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi\lambda n}\left[\left\{\int_0^{\alpha n}+\int_{\alpha n}^{\pi}\right]\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\right|dt.$$

$$=I_1+I_2 \text{ माना। जहाँ } \alpha_n=\frac{\mu_n}{\lambda_n}$$

अब

$$|I_1|=\left|\frac{1}{2\pi\lambda_n}\int_0^{\alpha_n}\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\right|dt.$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_0^{\alpha_n}|\phi(t)|^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\alpha_n}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(k+\frac{1}{2})\,t}{\sin t/2}\right|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_0^{\alpha_n}t^{\alpha p-1}\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_0^{\alpha_n}\left(\frac{\lambda_n.n.t}{t}\right)^q dt\right\}^{1/q}$$

$$=0\left(\alpha_n^{\alpha-1/p}\right)(n\,\alpha_n) \text{ क्योंकि } \lambda_n\geqslant(n+1)\,\mu_n$$

$$=0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\}.$$

सिंह[4] द्वारा दिये गये तर्क से हमें प्राप्त होता है—

$$|I_2| = \left|\frac{1}{2\pi\lambda_n}\int_{\alpha n}^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \sin (K+\tfrac{1}{2})\, t \right| dt$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left(\frac{|\phi(t)|}{t^{1/p+2\alpha}}\right)^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} \mu_k \sin (K+\tfrac{1}{2})\, t}{t^{1/q-2\alpha}}\right|^q dt\right\}^{1/q}.$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_{\alpha n}^{\pi} (t^{\alpha-1/p-1/p-2\alpha})^p\right\}^{1/p}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left(\frac{\lambda(1/t)}{t^{1/q-2\alpha}}\right)^q dt\right\}.$$

क्योंकि

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \mu_k \sin (K+\tfrac{1}{2})\, t\right| \leqslant 0\{\lambda(1/t)\}$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{(\alpha_n)^{-\alpha p-1}\right\}^{1/p}\left\{\lambda\left(\alpha_n^{-1}\right)\int_{\pi-1}^{\alpha_n-1} y^{-1-2\alpha q}\, dy\right\}^{1/q},$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left(\alpha_n^{-\alpha-1/p}\right)\left(\lambda\,\alpha_n^{-1}\right)\left(\left(\alpha_n^{-1}\right)^{-2\alpha q}\right)^{1/q}$$

$$=0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\}.$$

निर्देश

1. दीक्षित, जी० डी०, Ind. J. Math, 1965, 7, 31-39.
2. खान, एच० एच०, Ind. J. pure Appl. Maths, 1974, 5, 132-136.
3. कोरोवकिन, पी० पी०, Linear operators and approximation theory, हिन्दुस्तान पब्लि० कार्पो०, दिल्ली, 1960.
4. सिंह, टी०, The Mathematics Student, 1979, 47, 222-225.
5. जिगमंड, ए०, Trigonometric series, भाग I तथा II, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

रामतिल के बीज एवं बीजों के अंकुरण का अध्ययन

अर्चना पाण्डेय

शासकीय आदर्श विशान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1989]

सारांस

प्रस्तुत शोध-पत्र में रामतिल के बीज एवं उनके अंकुरण का विवरण दिया गया है। इसके बीजों का भार 2.52 मि०ग्रा० से 2.77 मि०ग्रा० तथा आयतन 0.0055 मि०ली० से 0.0085 मि०ली देखा गया। बीजों का अधिकतम अंकुरण 1 से०मी० की गहराई में होता है, जबकि दिन में एक बार पानी देने पर सबसे ज्यादा बीज अंकुरित होते हैं। विभिन्न प्रकार की मृदा में अंकुरण का क्रम अलग-अलग प्रकार का पाया गया। इसके साथ ही अंकुरण की प्रत्येक अवस्था में अंकुरण की शुरुआत तथा अंकुरण गति का भी उल्लेख किया गया है।

Abstract

Some observations on the seed and seed germination of Guizotia abyssinica. *By* Archana Pandeya, Government Model Science College, Rewa (M. P.)

The seed and the seed germination of *Guizotia abyssinica* was studied under the influence of certain ecological factors mentioned in the present paper. The seed weight and the seed volume range from 2.52 mg to 2.77 mg and 0.0055 ml to 0.0085 ml, respectively. Maximum number of seeds germinate at the depth of 1 cm, while highest germination was observed in daily watering. The germination behaviour of this species showed a great variation in different types of soil. Effort has also been made to enumerate germination initiation (days) and germination speed.

रामतिल (Niger) कम्पोजिटी कुल का सदस्य है। इसके बीजों से तेल प्राप्त किया जाता है। बीजों में 38 से 50% तक हल्के पीले रंग का, गंधहीन, खाने योग्य तेल होता है, जिसका एक विशेष स्वाद (nutty taste) होता है। इस निम्न श्रेणी के तेल का उपयोग साबुन बनाने, प्रकाश तथा चिकनाई के

सारणी 1

रामतिल (Guizotia abyssinica) के बीजों का भार तथा आयतन

बीज संख्या	बीज का भार (मि० ग्रा०)	बीज का आयतन (मि० ली०)
1	2.77	0.0085
2	2.72	0.0082
3	2.71	0.0081
4	2.75	0.0085
5	2.72	0.0082
6	2.72	0.0082
7	2.69	0.0079
8	2.70	0.0081
9	2.55	0.0056
10	2.57	0.0058
11	2.59	0.0060
12	2.70	0.0081
13	2.52	0.0055
14	2.52	0.0055
15	2.60	0.0061
16	2.59	0.0060
17	2.60	0.0061
18	2.60	0.0061
19	2.58	0.0059
कुल योग	52.84	0.1385
मध्यमान ($\bar{x}$)	2.64	0.0069
$\bar{x}$±S. D.	2.62±0.80	0.0069+0.0005

लिए किया जाता है। इसकी खली मवेशियों का एक अच्छा आहार है। इसके अतिरिक्त नाइजर का तेल औषधिक महत्व का भी है। तेल की मालिश से वात (rheumatism) के दर्द एवं सूजन में काफी आराम पहुँचता है[1]।

प्रयोगात्मक

रामतिल की खेती जुलाई से सितम्बर के मध्य की जाती है। इसकी फसल नवम्बर-दिसम्बर में तैयार होती है। इसके बीज दिसम्बर 1988 में एकत्रित किए गए थे। बीजों का भार रासायनिक तुला से तथा आयतन सूक्ष्म नपना गिलास (Micromeasuring Cylinder) से ज्ञात किया गया। अंकुरण प्रयोग 7 से०मी० की पेट्रीडिशेज में किए गए। प्रत्येक डिश को एक सप्ताह तक प्रतिदिन देखा गया। बीजावरण (Seed coat) से मूलांकुर (radicle) निकलने को अंकुरण माना गया। परिणाम अंकुरण शुरुआत, अंकुरण गति, अंकुरण प्रतिशत के रूप में दर्शाए गए हैं (सारिणी 2-4)।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 के आँकड़ों से स्पष्ट है कि रामतिल के बीजों का सबसे कम भार 2.52 मि०ग्रा० तथा सबसे अधिक भार 2.77 मि०ग्रा० है, तथा एक बीज का औसत भार 2.64 मि०ग्रा० पाया गया। इसी प्रकार, इसका आयतन 0.0055 मि० ली० से 0.0085 मि०ली० तथा एक बीज का औसत आयतन 0.0069 मि०लीं० नापा गया।

मृदा की विभिन्न गहराई में रामतिल के बीजों के अंकुरण का अध्ययन करने के लिए 50 बीज 0 से 5 से० मी० की गहराई में बोए गए तथा इन्हें प्रतिदिन पानी दिया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 2 में दर्शाए गए हैं। 4 से० मी० की गहराई के बाद बीजों का अंकुरण नहीं होता है। इसी प्रकार, सतह

सारणी 2

मृदा की विभिन्न गहराई में रामतिल के बीजों का अंकुरण

बीज बोने की गहराई (से०मी०)	अंकुरण शुरुआत (दिन)	अंकुरण जाति (दिन)	अंकुरण (प्रतिशत)
0	5	0	08
1	7	12	86
2	10	15	64
3	11	—	32
4	11	—	18
5	—	—	—

पर बोए गए बीज भी बहुत कम अंकुरित होते हैं। सबसे अच्छा अंकुरण 1 से०मी० की गहराई में देखा गया। सतह पर बोए गए बीजों की अंकुरण शुरुआत तीव्र होती है, जबकि 2 से०मी० गहराई में बोए गए बीज अधिकतम अंकुरण गति प्रदर्शित करते हैं।

सारणी 3 में दर्शाए गए आँकड़ों से ज्ञात होता है कि विभिन्न प्रकार की मृदा में रामतिल के बीजों का अंकुरण अलग-अलग है। सबसे अच्छा अंकुरण कार्बनिक खाद में तथा सबसे कम बालू में होता है। चूँकि बालू में जल ग्रहण क्षमता सबसे कम होती है, अतः इसमें बोए गए बीजों को उपयुक्त नमी नहीं मिलती, इसलिए इन बीजों के अंकुरण की शुरुआत भी देर से होती है। सबसे अच्छी अंकुरण-शुरुआत तीनों प्रकार की मृदा के मिश्रण में देखी गयी।

सारणी 3

विभिन्न प्रकार की मृदा में रामतिल के बीजों का अंकुरण

मृदा के प्रकार	अंकुरण शुरुआत	अंकुरण गति	अंकुरण (प्रतिशत)
बालू	5	0	40
कार्बनिक खाद	3	10	90
लोम (दोमट)	4	12	60
मिश्रण (बालू+कार्बनिक खाद+लोम)	3	11	70

रामतिल के बीजों के अंकुरण में पानी की विभिन्न स्थितियों का अध्ययन करने के लिए बीजों को पेट्रीडिसेज में बोया गया तथा इन्हें नियंत्रित पानी दिया गया। सारणी 4 से विदित होता है कि जलमग्न स्थिति (Waterlogged condition) अंकुरण पर विपरीत प्रभाव डालती है। प्रतिदिन पानी देने पर अधिकतम बीज अंकुरित होते हैं। पानी की कमी (तीसरे दिन पानी देने पर) से भी अंकुरण पर प्रतिकूल असर पड़ता है। प्रतिदिन तथा दिन में दो बार पानी देने पर शीघ्र अंकुरण आरम्भ होता है।

बीज का आकार एवं भार एक आनुवंशिकीय लक्षण है। साथ ही यह बीज के विकास के समय भोजन के लिए होने वाली आन्तरिक स्पर्धा द्वारा भी नियंत्रित रहता है[2,3]। सामान्यतया एकवर्षीय शाकीय पौधों तथा घासों के बीज हल्के एवं छोटे होते हैं। बीज के आकार का सम्बन्ध इसके वितरण से स्थापित किया जा सकता है। छोटे तथा हल्के बीजों का अच्छा वितरण (dispersal) होता है। चूँकि रामतिल के बीजों के विकिरण की कोई विशेष विधि नहीं पाई जाती, अतः हल्के तथा छोट बीज स्वयं इस समस्या का हल करते हैं। इस अध्ययन से यह स्पष्ट है कि बीजों के भार तथा आयतन में एक घनिष्ठ सम्बन्ध है। हल्के बीजों का आयतन कम तथा भारी बीजों का आयतन अधिक होता है, जैसा कि द्विवेदी[4] द्वारा बताया गया है।

सारणी 4

रामतिल के बीजों के अंकुरण में पानी की विभिन्न स्थितियों (Watering regimes) का प्रभाव

पानी की विभिन्न स्थितियाँ	अंकुरण में शुरुआत (दिन)	अंकुरण गति (दिन)	अंकुरण (प्रतिशत)
जलमग्न स्थिति	3	—	05
दिन में दो बार सिंचाई	2	6	85
दिन में एक बार सिंचाई	2	5	90
अँतरे दिन सिंचाई	3	6	75
तीसरे दिन सिंचाई	4	—	35

अंकुरण किसी पौधे के जीवन-चक्र की सबसे अहम् अवस्था होती है।[5] बीजों के अंकुरण में वृद्धि में मृदा का प्रत्यक्ष प्रभाव पड़ता है।[6] रामतिल के बीजों का सबसे अच्छा अंकुरण 1 से०मी० की गहराई पर होता है। **हन्फ**[7] के अनुसार हल्के तथा कम भार वाले बीजों का अंकुरण कम गहराई पर तथा बड़े तथा अधिक भार वाले बीजों का अंकुरण अधिक गहराई पर होता है। प्राप्त परिणाम इस कथन की पुष्टि करते हैं। इसी प्रकार के निरीक्षण **जोशी एवं कम्बोज**[8] तथा **दुबे एवं मल्ल**[9] द्वारा भी किए गए।

विभिन्न प्रकार की मृदा बीजों के अंकुरण, वृद्धि तथा ग्रहण क्षमता, ताप आदि को प्रभावित करती हैं। रामतिल के बीजों का अधिकतम अंकुरण कार्बनिक खाद में होता है। यह इसके भौतिक तथा रासायनिक गुण के कारण होता है।[10]

पानी का बीजों के अंकुरण पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है। इस अध्ययन से यह स्पष्ट है कि पानी की अधिक मात्रा में **नाइजर** के बीज अंकुरित नहीं होते (सारणी 4)। प्रति दन सिंचाई करने पर अधिकतम अंकुरण होता है। इसी प्रकार के परिणाम **दत्ता एवं सेन**[11], **सिन्हा**[12] तथा **द्विवेदी एवं पाण्डेय**[13] द्वारा दिए गए हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्राचार्य तथा विभागाध्यक्ष, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०) द्वारा प्रदत्त प्रयोगशाला सुविधाओं के प्रति हम आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. वेल्थ ऑफ इण्डिया, A Dictionary of Raw Materials and Industrial products-Raw Material Series, 1948-1976, Council of Scientific and Industrial Research, New Delhi, 10 Vols.

2. सैलिसवरी, ई० जे०, The reproductive capacity of plants, 1942, G. Bell & Sons, Ltd., London.

3. पाण्डेय, एस० सी०, पुरी, जी० एस० तथा सिंह, जे० एस०, Research methods in plant ecology, 1968, Asia Publishing House, Bombay.

4. द्विवेदी, एस० एन०, Proc. 74th Ind. Sci. Cong. Part III, pp 257, 1987.

5. वेन्ट, एफ० एम०, Experimental control of plant growth, 1957, Chronica Botanica, Waltham Mass.

6. डुबेनमायर, आर० एफ०, Plant and Environment, 1959, John Wiley & Sons. New York.

7. हुन्फ, एम०, Keimung and Entiwcklung des Klettenlabrautes (*Galluim aparine* L.) in Verschiedenar Aussaattiefe, 1944.

8. जोशी, एम० सी० तथा कम्बोज, ओ० पी०, J. Indian Bot. Soc., 1959, **46**, 63-75.

9. दुबे, पी० एस० तथा मल्ल, एल० पी०, Oecologia (Berlin), 1972, **10**, 105-110.

10. रस्सेल, ई० जे०, Soil Condition and Plant growth, 1961, Longmans Green & Co., London.

11. दत्ता, एस० सी० तथा सेन, सोना, Acta Botanica Academial Scientiarum Hungaricae, 1981, **27**, 319-323.

12. सिन्हा, अनुभा, GEOBIOS, 1982, **9**, 62-65.

15. पाण्डेय, अर्चना, Proc. 77th Indian Sci. Cong., 1990 (Communicated).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

सौर ऊर्जा का प्रकाश-रासायनिक रूपान्तरण

सुरेश सी० आमेटा, कु० साधना खमेसरा, मंजुबाला तथा जी० सी० दुबे
रसायन विभाग, यूनिवर्सिटी कालेज आफ साइंस, उदयपुर (राज०)

[प्राप्त—जनवरी 5, 1989]

सारांश

सौर ऊर्जा रूपान्तरण के लिए मेथिलीन ब्लू-डाइएथिलीन ट्राइऐमीनपेंटाऐसीटिक अम्ल (DTPA) प्रणाली का उपयोग फोटोगैल्वेनिक सेल में किया गया। पी-एच, रंजक की सान्द्रता, ताप, अपचायक में परिवर्तन से जो प्रभाव होता है उसका अध्ययन किया गया।

Abstract

Photochemical conversion of solar energy : Use of methylene blue-diethylenetriaminepentaacetic acid system. *By* Suresh C. Ameta, (Miss) Sadhna Khamesra, Ms Manju Bala and Gyanesh C. Dubey, Department of Chemistry, University College of Science, Sukhadia University, Udaipur (Raj.)

Methylene blue-diethylenetriaminepentaacetic acid (DTPA) system was used in photogalvanic cell for solar energy conversion. The effect of variation of pH, concentration of dye and reductant, temperature, etc. has been investigated.

सर्वप्रथम रिडियल तथा विलियम्स[1] ने फोटोगैल्वेनिक प्रभाव का प्रेक्षण किया जिसका नियमित अध्ययन रैविनोविच ने[2] बाद में किया। इस कार्य का विभिन्न प्रणालियों के लिए प्रयोग हुआ[3–4]। किन्तु साहित्य के अध्ययन से पता चला कि प्रकाश ऊर्जा के रूपान्तरण हेतु मेथिलीन ब्लू का उपयोग प्रकाश उत्तेजक[9, 10] के रूप में नहीं हुआ। फलतः प्रस्तुत शोधकार्य हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में मेथिलीन ब्लू-सोडियम हाइड्राक्साइड तथा डाइमेथिलीन ट्राइऐमीन पेंटा ऐसीटिक अम्ल (DTPA) व्यवहृत किये गये। सारे विलयन दुबारा आसवित जल में तैयार किये गये।

मेथिलीन ब्लू, DTPA तथा सोडियम हाइड्राक्साइड मिश्रण को एक *H*-प्रकार के सेल में लिया गया। सेल के एक अंग में प्लैटिनम इलेक्ट्रोड को डुबो दिया गया और दूसरे में संतृप्त कैलोमोल इलेक्ट्रोड (SCE)। इसके बाद प्लैटिनम इलेक्ट्रोड को 200 W टंगस्टन लैम्प द्वारा अनुप्रभावित किया गया और दूसरा अंग जिसमें SCE था उसे अंधेरे में रखा गया। जल-फिल्टर के द्वारा उष्मीय विकिरणों को दूर रखा गया।

DTPA द्वारा मेथिलीन ब्लू के प्रकाशरासायनिक विरंजन को क्षारकीय माध्यम में पोटेंशियो-मीटर द्वारा मापा गया। MB-DTPA/OH^-/$h\nu$ प्रणाली के विभव तथा उत्पन्न धारा को क्रमशः डिजिटल पी-एच मापी तथा मल्टीमीटर द्वारा मापा गया।

परिणाम तथा विवेचना

सेल की वैद्युत निर्गम (output) पर पी-एच परिवर्तन के प्रभाव का अध्ययन किया गया। तत्सम्बन्धी परिणाम सारणी 1 में दिये जा रहे हैं।

सारणी 1

पी-एच परिवर्तन का प्रभाव

[मेथिलीन ब्लू] $= 3.20 \times 10^{-5}$ M [DTPA] $= 2.20 \times 10^{-2}$ M
ताप $= 303°K$ तीव्रता $= 10.4$ mW cm^{-2}

पी-एच	प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश-धारा (μA)
12.5	164.0	47.0
12.7	189.0	49.0
12.9	212.0	61.0
13.1	350.0	82.0
13.2	283.0	65.0
13.4	198.0	51.0

यह देखा जाता है कि पी-एच में वृद्धि होने से प्रकाश विभव तथा प्रकाशधारा में तब तक वृद्धि होती है जब तक कि यह पी-एच 13.1 पर उच्चिष्ट को प्राप्त नहीं हो लेती। इससे आगे पी-एच वृद्धि से वैद्युत निर्गम पर विपरीत प्रभाव पड़ता है।

रंजक (MB) तथा अपचायक (DTPA) की सान्द्रता पर प्रकाशविभव तथा प्रकाशधारा की निर्भरता का भी अध्ययन किया गया (सारणी 2)।

सारणी 2

रंजक तथा अपचायक सान्द्रता का प्रभाव

पी-एच=13.1 [मेथिलीन ब्लू] $\times 10^5$ M	ताप=303°K [DTPA] $\times 10^2$ M	तीव्रता=10.4 mW cm^{-2} प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश-धारा (μA)
3.2	1.5	118.0	49.0
3.2	1.7	178.0	65.0
3.2	1.9	201.0	67.0
3.2	2.2	350.0	80.0
3.2	2.4	198.0	66.0
3.2	2.6	125.0	52.0
2.7	2.2	197.0	54.0
3.1	2.2	303.00	71.0
3.2	2.2	350.0	80.0
3.5	2.2	136.0	52.0
3.6	2.2	129.0	48.0
3.8	2.2	98.0	36.0

मेथिलीन ब्लू की सान्द्रता निम्न होने पर निर्गम अल्प था क्योंकि रंजक के अणुओं की अल्प संख्या ही उत्तेजन के लिए उपलब्ध थी और प्लैटिनम इलेक्ट्रोड तक क्रमागत इलेक्ट्रान दान कम था। पुनः जब रंजक की सान्द्रता बढ़ाई गई तो प्रकाश विभव में ह्रास हुआ क्योंकि रंजक अणु तक पहुँचने वाले प्रकाश की तीव्रता घट जाती है जिससे प्रकाश का अधिकांश भाग रास्ते में रंजक अणुओं द्वारा अवशोषित हो जाता है। अपचायक की सान्द्रता परिवर्तन करने पर भी ऐसे ही परिणाम प्राप्त हुए। DTPA की सान्द्रता में कमी करने से शक्ति निर्गमन में ह्रास हुआ क्योंकि रंजक अणुओं को इलेक्ट्रान प्रदान करने वाले अपचायक अणुओं की संख्या न्यून हो जाती है। इसी तरह अपचायक की उच्च सान्द्रता रंजक अणुओं को वांछित कालावधि में इलेक्ट्रोड तक पहुंचने में बाधक बनती है।

ताप का भी प्रभाव देखा गया। तत्सम्बन्धी परिणाम सारणी 3 में अंकित हैं।

सारणी 3

ताप का प्रभाव

$[MB]=3.20\times10^{-5}$ M $[DTPA]=2.20\times10^{-3}$ M

PH=13.1 तीव्रता=10.4 mW cm^{-2}

ताप (°K)	प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश धारा (μA)	शक्ति (μW)
298	358.0	79.1	28.3
303	350.0	80.0	28.0
308	342.0	80.7	27.6
313	333.0	81.4	27.1
318	325.0	82.4	26.8

प्रकाश-गैलवनिक सेल के ताप में वृद्धि होने पर प्रकाश धारा में वृद्धि होती है क्योंकि सेल के आन्तरिक प्रतिरोध में ह्रास आता है। फलस्वरूप प्रकाश विभव में संगत ह्रास होता है।

प्रकाशधारा में प्रकाश की तीव्रता में वृद्धि के साथ ही रैखिक वृद्धि देखी जाती है जबकि प्रकाश विभव प्रकाश तीव्रता में वृद्धि के साथ लागरैथमिक विधि से बढ़ता है।

सेल के धारा-वोल्टता अभिलक्षणों का भी अध्ययन परिपथ में बाह्य भार (log 500 K) व्यवहृत करके किया गया। यह देखा गया कि सेल का i—V वक्र अपने आदर्श आयताकार आकार से विचलित हो गया। प्रकाश-गैलवनिक सेल के पूरण गुणक (fill factor) तथा रूपान्तरण-दक्षता क्रमशः 0.26% तथा 0.1140% है।

फोटोवोल्टैक सेल में प्रकाशधारा के जनन की प्रस्तावित क्रियाविधि निम्नवत् है :

प्रदीप्त प्रकोष्ठ

$$MB \xrightarrow{h\nu} MB^* \quad (1)$$

$$MB^*+DTPA \longrightarrow MB^-+DTPA^+ \quad (2)$$

इलेक्ट्रोड पर

$$MB^- \longrightarrow MB+e^- \quad (3)$$

अंधकारमय प्रकोष्ठ

इलेक्ट्रोड पर

$$MB + e^- \longrightarrow MB^- \quad (4)$$

$$MB^- + DTPA \longrightarrow MB + DTPA \quad (5)$$

जहाँ

MB=मेथिलीन ब्लू

DTPA=डाइएथिलीन ट्राइऐमीनपेंटाऐसीटिक अम्ल

निर्देश

1. रिडियल, ई० के० तथा विलियम्स, डी० सी०, J. Chem. Soc., 1925, 258.
2. रैबिनोबिच, ई०, J. Chem. Phys. 1940, **8**, 551.
3. क्लार्क, डब्लू० डी० के० तथा एकर्ट, जे० ए०, Solar Energy, 1975, **17**, 147.
4. गोमर, आर०, **इलेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1975, **20**, 13.
5. पाटर, ए० ई० तथा थैलर, एल० एच० , Solar Energy, 1959, **3**, 1.
6. ओस्टर, जी० तथा एडेलमान, ए० एच०,J. Amer. Chem. Soc., 1956, **78**, 913.
7. किर्श-ड-मेसमीकर, ए०, लीमपौल, पी० तथा नैसील्स्की, जे०, Nouv. J. Chem. 1979, **3**, 239.
8. कानेको, एम० तथा यामाडा, ए०, J. Phys. Chem. 1977, **81**, 1213.
9. आमेटा, सुरेश सी०, दुबे, टी० डी०, दुबे, जी० सी० तथा आमेटा, आर० सी०, Z. Physik Chem. (Leipzig), 1984, 265, 838.
10. दुबे, ज्ञानेश, सी० पी-एच० डी० थीसिस, सुखाडिया यूनिवर्सिटी, उदयपुर 1985.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

O-N-O मोएइटी युक्त O-(एन-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनॉल तथा इसके द्विसंयोजक धातु संकुलों के कीटाणुनाशी गुणों का अन्वेषण

डी० डी० ओझा, सुश्री सांत्वना गौड़ तथा आर० के० मेहता
रसायन विभाग, जोधपुर, विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1989]

सारांश

O-(एन-2-हाइड्रॉक्सी-ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनॉल तथा इसके द्विसंयोजक धातु कीलेटों का भौतिक-रासायनिक तकनीक द्वारा संश्लेषण एवं अध्ययन किया गया। आधुनिक अन्वेषण परिणामों के आधार पर धातु कीलेटों की विविध रसायन में सार्थकता के कारण इनकी जैविक क्षेत्रों में, जैसे फफूंदी-नाशक, कीटाणु एवं जीवाणुनाशक तथा औषधियों के रूप में अत्यधिक उपादेयता सिद्ध हो चुकी है। जिन यौगिकों में आक्सीजन, गंधक तथा नाइट्रोजन दाता परमाणु होते हैं उनमें इस प्रकार के जैसे अकार्बनिक गुण[1–3] विशिष्ट रूप से विद्यमान होते हैं। कप-प्लेट विधि[4] द्वारा Cu(II), Ni(II) तथा Co(II) कीलेटों का **बेसीलस सबटिलिस** (Bacilus subtilis), **स्टेफीलोकोकस आरिअस** (Staphylococcus a ureus) तथा **बेसीलस पम्यूलस** (Basilus pumulus) जीवाणुओं के साथ जीवाणुनाशक गुणों का अध्ययन किया गया। इन धातु कीलेटों में जीवाणुनाशकता का क्रम Ni(II)> Co(II)>Cu(II) पाया गया।

Abstract

Investigation of anti-bacterial activity of O-(N-2-hydroxy-acetophenoimino) ethanol and its bivalent metal chelates possessing O-N-O-moiety. *By* D. D. Ozha, (Miss) Santwana Gaur and R. K. Mehta, Department of Chemistry, University of Jodhpur, Jodhpur.

O-(N-2-hydroxy-acetophenoimino) ethanol and its bivalent metal chelates were synthesised and studied by physico-chemical methods. Compounds containing

oxygen, nitrogen or sulphur donor atoms exhibit remarkable biocidal activities. Due to stereochemical significance, the metal chelates have been found useful as insecticides, fungicidis, algaecides, bactericides and in medicines. Using cup-plate method, the metal chelates of Co(II), Ni(II) and Cu(II) were studied with Bacilus subtilis, staphylococcus aureus and Bacilus pumulus bacteria. The antibacterial efficacy of these chelates have been found to be in the order Ni(II)>Co(II)>Cu(II).

अनेक औषधियों में विषमचक्रीय नाभिक युक्त यौगिक होने से भैषजिक विज्ञान में उनकी महत्वपूर्ण भूमिका होती है। शिफ-क्षारकों तथा क्यूमेरीनों की रसायन चिकित्सा में उपयोगिता प्रेक्षित की जा चुकी है[5–7]। धातु संकुलों की जैविक क्षेत्र में विशिष्ट उपादेयता के कारण वैज्ञानिकों का इस ओर ध्यान आकृष्ट हुआ है। इसी उद्देश्य से कुछ संक्रमण धातुओं के O-(एन-2-हाइड्राक्सी-ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनॉल (HAE) के साथ कीलेट संश्लेषित किये गये तथा इनके जैव-अकार्बनिक अन्वेषण कार्य को हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

O-(एन-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोइमीनो) इथेनॉल (HAE) का संश्लेषण 2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोन तथा एथेनॉल अमीन के समआणविक मिश्रणों को पश्चवाहित करके किया गया। Co(II), Ni(II) तथा Cu(II) धातु के कीलेटों को धातु नाइट्रेट की HAE की अभिक्रिया द्वारा पूर्व प्रतिवेदित विधि[8] द्वारा ज्ञात किया गया। इन धातु कीलेटों का भौतिक-रासायनिक अन्वेषण भी मानक विधियों द्वारा किया गया। इस अन्वेषण में तीन प्रकार के जीवाणुओं—**बेसिलस सबटिलिस, स्टेफिलोकोकस ओरिअस** तथा **बेसिलस पम्यूलस** पर इनका प्रभाव देखा गया है।

डाइमेथिल फारमेमाइड विलायक में HAE तथा इसके Co(II), Ni(II) एवं Cu(II) कोलेटों को कप-प्लेट विधि[4] द्वारा जीवाणुनाशक प्रक्रिया हेतु स्क्रीन किया गया। स्ट्रेप्टोमाइसीन की विषाक्तता दर के मानक में प्रयोग किया गया।

कप-प्लेट द्वारा HAE तथा धातु कीलेटों के कीटाणुनाशी गुणों का अध्ययन

ऐगार प्लेटों को प्रारम्भिक ऐगार बीजों के पिघले माध्यम में 50° से० पर 1 मि० मी० कार्क वेधक की सहायता से छेद कर तैयार किया गया। कप के पेंदे को बन्द करने हेतु दो बूँद पिघला ऐगर डाला गया। इसके पश्चात् डाइमेथिल फारमेमाइड में एन्टीबायोटिक विलयन (1-20 μ g/ml.) पिपेट के द्वारा इस पर डाला गया।

इसे 24 घण्टे तक इनक्यूबेटर में रखा गया और अवरोध के परिक्षेत्र के प्रेक्षण लिये गये। प्लेट पर ऐगार पोषक तथा एण्टीबायोटिक (कुल सान्द्रण (20 μ g/ml.) को डाला गया तथा इस प्रकार के 5 प्रेक्षणों को रिकार्ड किया गया। सारणी 1 में प्रेक्षणों के परिणामों का विवरण दिया गया है।

सारणी 1

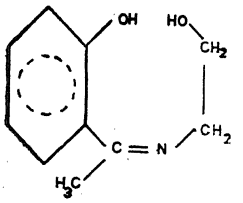
HAE तथा उसके द्विसंयोजी कीलेटों के जीवनाशी गुणों का अध्ययन
अवरोध परिक्षेत्र का व्यास (मि० मी०)

यौगिक	बी० सबटिलिस	एस० ओरिअस	बी० पम्यूलस
HAE	9.4	8.0	6.2
Co(II)-HAE	12.5	10.3	8.6
Ni(II)-HAE	14.4	12.2	10.3
Cu(II)-HAE	10.2	8.4	7.0

परिणाम तथा विवेचना

HAE में एक विषमचक्रीय व लय होता है। इसका सूत्र $C_{10}H_{13}NO_2$ है।

सूक्ष्म विश्लेषण परिणाम (तात्विक विश्लेषण एवं आणविक मात्रा) द्वारा धातु कीलेटों में 1:2 (धातु:संलग्नी) स्टाइकियोमिति (सारणी-2) दर्शायी गई है तथा इनका संघटन $[MCAE(X)_3]$ है जिसमें M=द्विसंयोजक धातु आयन, (AE)-HAE का अप्रोटीय रूप है (चित्र 1)।



चित्र 1. N-(2-हाइट्राक्सीऐसीटो फोनोइमीनो) एथेनाल HAE

चुम्बकीय घूर्ण परिणाम (सारणी 2) इन कीलेटों में अयुग्मी इलेक्ट्रॉन दर्शाते हैं। इन कीलेटों में धातु-धातु अन्तर्क्रियायें नहीं होती हैं। इस प्रकार इन कीलेटों में चक्रण-विनिमय की कोई सम्भावना नहीं रहती तथा धातु कीलेट एकलक ही बने रहते हैं। इन यौगिकों के अल्पचालकता मान भी इन्हें विद्युत-अनपघट्य प्रदर्शित करते हैं।

अवरक्त स्पेक्ट्रम

HAE के अवरक्त स्पेक्ट्रम में तीन मुख्य बैण्ड 3640-3480, 1610-1625 तथा 3350-3370 cm^{-1} परास में पाये गये जो कि νOH (फीनोलिक), ν>C=N और νOH (एथेनांलिक) की उपस्थिति दर्शाते हैं।

सारणी 2

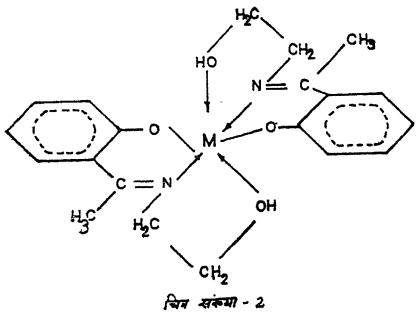
HAE के द्विसंयोजी धातु कीलेटों के रंग, लब्धि, अणुभार, तात्विक विश्लेषण, चुम्बकीय घूर्ण तथा चालकता का विवरण

संघटन	रंग	लब्धि	अणुभार		तात्विक विश्लेषण (%) धातु		नाइट्रोजन		कार्बन		हाइड्रोजन		μ_{eff} B. M. at 308°K	ΩM Ohm cm^2 $mole^{-1}$
			प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित		
$[C_{10}H_{13}NO_2]$	तम्बाकू	60	162	179	—	—	7.71	7.82	66.96	67.04	7.16	7.26	—	—
$[CO(L)_2X_3]$	भूरा चाकलेट	71	458	469	12.42	12.56	5.89	5.97	25.48	25.59	3.97	4.05	4.89	4.2
		(60)	(640)	(652)	(8.93)	(9.03)	(10.62)	(10.74)	(64.31)	(64.42)	(5.83)	(5.98)	(4.85)	(4.1)
$[Ni(L)_2X_3]$	जलीय हरा	62	459	469	12.48	12.52	590	5.97	25.47	25.59	3.98	4.05	2.91)	4.2
		(56)	(641)	(652)	(8.94)	(9.03)	(10.63)	(10.94)	(64.32)	(64.42)	(5.82)	(5.98)	(2.95)	(4.2)
$[Cu(L)_2X_3]$	गहरा हरा (पेल ग्रीन)	65	464	474	13.31	13.40	5.79	5.91	25.27	25.32	3.90	4.01	1.90	6.5
		(68)	(649)	(657)	(9.53)	(9.67)	(10.54)	(10.65)	(63.80)	(63.93)	(5.82)	(5.94)	(1.92)	(6.3)

X=H_2O या पिरीडीन

कोष्ठक में पिरीडीन के एडक्टस के मान दिये गये हैं।

सभी धातु कीलेटों में 3640-3480 तथा 1610-1625 cm^{-1} की परस में बैन्ड अनुपस्थित पाये गये जो फीनोलिक-OH का अप्रोटीनीकरण तथा इसका संकुलीकरण में भाग लेने को दर्शाते हैं। उच्च परास (~20 cm^{-1}) में C—O का विस्थापन फीनोलिक आक्सीजन तथा धातु में आबन्ध को तथा नीचे के क्षेत्र में विस्थापन (~25 cm^{-1}) एजोमीथाइन नाइट्रोजन का संकुलीकरण दर्शाता है। दो अन्य बैन्ड 510-540 परास में तथा 310-280 cm^{-1} जो कि νM—O तथा νM—N की उपस्थिति को दर्शाते हैं, भी पाये जाते हैं। इसी प्रकार 250-100 cm^{-1} की परास में बैड की अनुपस्थिति धातु-धातु बन्धुता की अनुपस्थिति बताती है। सभी जलीय कीलेटों में एक बड़ा बैन्ड 3310 cm^{-1} पर पाया गया जो जल के अणु को दर्शाता है। उच्च ताप (180-290° से०) पर जल अणुओं का ह्रास इनके संकुलन को दर्शाता है न कि इनकी उपस्थिति को। अत: Co(II) तथा Ni(II) कीलेटों में अष्टफलकीय संरचना तथा Cu(II) कीलेटों में विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति जॉनटेलर प्रभाव[9] के अनुसार पाई गई। (चित्र 2)



चित्र संख्या - 2

चित्र 2 O(N-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनाल के द्विसंयोजी धातुकीलेट

संश्लेषित यौगिकों की संरचना का भैषजिक अन्वेषण से सम्बन्ध

HAE तथा इसके Co(II), Ni(II) एवं Cu(II) कीलेटों के जीवाणुनाशक गुणों का अध्ययन DMF विलायक में कप-प्लेट विधि से किया गया। HAE का तीन जीवाणुओं स्टेफिलोकोकस आरिअस, बेसिलस सबटिलिस तथा बेसीलस पम्यूलस के साथ परीक्षण दर्शाता है कि यह एक अच्छा कीटाणुनाशक है। सारणी 1 का अध्ययन दर्शाता है कि कीटाणु के अवरोध के क्षेत्र का व्यास क्रमश: बेसिलस सबटिलिस > स्टेफिलोकोकस ओरिअस > बेसिलस पम्यूलस है। विभिन्न सूक्ष्म जीवाणुओं की विभिन रसायनों के प्रति सहनशीलता भी अलग-अलग होती है। बेसिलस सबटिलिस तथा बेसिलस पम्यूलस की स्पोर बनाने की प्रवृत्ति इनको विषाक्त रसायनों को सहन करने की शक्ति प्रदान करती है। स्टेफिलोकोकस आरिअस में प्रतिरसायन बनाने की क्षमता होती है। इन सूक्ष्मजीवाणुओं की सहनशीलता का क्रम श्रीवास्तव[10] तथा उनके सहयोगियों द्वारा ज्ञात किये गये निष्कर्ष के अनुरूप पाया गया।

सारणी 1 के अध्ययन से विदित होता है कि संलग्नी HAE की तुलना में सभी धातु कीलेट अपेक्षाकृत अधिक क्रियाशील है। इन धातु कीलेटों की कीटाणुनाशक क्षमता का क्रम क्रमश: Ni(II)>Co(II)>Cu(II) पाया गया।

अत: ऐसा प्रतीत होता है कि कीलेटीकरण के कारण HAE के कीटाणुनाशक गुणों में अभिवृद्धि हुई है। कीलेटीकरण के पश्चात् सम्भवत: संलग्नी की वसा विलेयता से इनकी क्रियाशीलता बढ़ जाती है जिससे जीवाणुकोश से इसका आबन्ध बन जाता है तथा अवरोधक एंजाइम अक्रियाशील हो उठते हैं। धातु कीलेटों में Ni(II) कीलेट, Co(II) तथा Cu(II) कीलेटों से ज्यादा शक्तिशाली पाये गये।

अत: संलग्नी HAE में फीनोलिक-OH, एथेनालिक-OH तथा ऐजोमीथाइन नाइट्रोजन के कारण जो पुन: धातु परमाणु से आबन्धित हो जाता है, इस प्रकार की क्रियाशीलता बढ़ती है।

निर्देश

1. भार्मागुदर, टी० डी०, पूजर, एम० ए० तथा अलगावदी, ए० आर०, **करेन्ट साइन्स**, 1987, **56**, 17, 889.
2. मित्तल, आर०, चतुर्वेदो, एस०, गोयल, एस० सी० तथा चतुर्वेदी, जी० के०, **वही**, 1986, **55**, 6, 312.
3. पूजर, एम० ए०, हदीमानो, बी० एस०, कुमारी, एम० एस० तथा नीलगुन्ड, वाई० एफ०, वही, **1986, 55, 7, 353.**
4. कावानग, एफ०, **एनालीटीकल माइक्रोबायोलाजी**, 1963, 126.
5. जान, एस० ए० तथा स्पीसर, ए० बी०, **जर्न० मेडिकल केमि०**, 1975, **18**, 391.
6. अब्दुल, ई० आई० तथा रहमान, ए० एस०, **अजनीयन फोर्सज**, 1976, **27**, 756.
7. खान, ए० एम० "माइक्रोवायोलाजी आफ मेडिकल स्टूडेन्टस" 1976, **1**, 146.
8. मेहता, आर० के०, डागा, के०, गौड़ एस० तथा रंगा, एस० पी०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1988, **23**(1) 73
9. जान, एस० ए० तथा टेलर ई०, **प्रोसी० रायल सोसा०**, लन्दन, 1937, **161**, 220.
10. श्रीवास्तव, टी० एन०, सेन गुप्ता, ए० के०, इ० **जर्न० कैमिस्ट्री**, 1982, **21A**, 384.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

हिपूरिक अम्ल के Be(II), Hg(II),V(IV) तथा Al(III) संकरों के स्थायित्व स्थिरांक

गोपेन्द्र कुमार

रसायन विभाग, ज़ाम्बिया विश्वविद्यालय, लुसाका (ज़ाम्बिया)

तथा

मनहरन नाथ श्रीवास्तव

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—नवम्बर 1, 1989]

सारांश

हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg (II), V(IV) तथा Al (III) संकरों के स्थायित्व स्थिरांकों का अध्ययन इरविंग तथा रसोटी की विभवमापी विधि द्वारा किया गया। अम्ल तथा लिगैंड के अनुमापन वक्रों के अध्ययन से प्रकट होता है कि प्रथम नति परिवर्तन के पश्चात् pH 10 के ऊपर दोनों वक्रों में सापेक्ष अन्तर एक तुल्यांक क्षार से अधिक की ओर अग्रसर होता जाता है, अतः एक दूसरा बफर क्षेत्र प्रस्तावित किया गया है। अम्ल के प्रोटानीकरण स्थिरांकों के मान क्रमशः $\log K_1H=11.03$ तथा $\log K_2H=3.58$ प्राप्त हुए हैं। प्रस्तुत अध्ययन से यह स्पष्ट है Be (II), Hg (II) तथा Al (III) निकायों में केवल दो संकर ML तथा ML_2 बनते हैं जबकि V(IV) निकाय में तीन संकर ML, ML_2 एवं ML_3 बनते हैं। इनके स्थायित्व स्थिरांकों के मान संशोधन पद विधि तथा उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। चूंकि Al(III) निकाय में दोनों पद साथ-साथ होते हैं अतः इसमें पूरी रासायनिक क्रिया के स्थायित्व स्थिरांक ($K_1.K_2$) का मान एल्बर्ट समीकरण द्वारा परिकलित किया गया है। स्थायित्व स्थिरांकों के मान इस प्रकार हैं :

Be(II) : $\log K_1=7.95\pm0.02$; $\log K_2=7.60\pm0.01$

Hg(II) : $\log K_1=7.36\pm0.03$; $\log K_2=6.60\pm0.02$

V(IV) : $\log K_1=9.39\pm0.02$; $\log K_2=8.91\pm0.04$; $\log K_3=5.68\pm0.01$

तथा

Al(III) : $\log K_1.K_2=18.41\pm0.03$

abstract

Stability constants of Be (II), Hg (II), V(IV) aud Al (III) complexes of hippuric acid. By G. Kumar, Chemistry Department, University of Zambia, Lusaka (Zambia) and M. N. Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Stability constants of Be (II), Hg (II), V(IV) and Al (III) complexes of hippuric acid have been studied potentiometrically by Irving and Rossotti's method. An examination of the ligand titration curve after the inflexion reveals that above pH 10 the relative shift between the acid and ligand tends to become more than one equivalent of alkali, thus suggesting a second buffer region. It may be ascribed to amido-imidol type of tautomerism. The protonation constants for hippuric acid are rep r-ted as log $K_1H=11.03$ (imidol—OH) and log $K_2H=3.58$(—COOH). It is clear from the studies that in Be (II), Hg (II) and Al (III) systems two complexes ML, and ML_2 are formed, whereas in V(IV) three complexes ML, ML_2 and ML_3 are formed. Their respective stability constants have been computed by correction term and successive approximation methods. But in Al(III) system, since the two steps occur almost simultaneously, only $K_1.K_2$ value fer the overall reaction has been computed by Albert's equation. The stability constants are :

Be (II) : log $K_1=7.95\pm0.02$; log $K_2=7.60\pm0.01$

Hg (II) : log $K_1=7.36\pm0.03$; log $K_2=6.60\pm0.02$

V (IV) : log $K_1=9.39\pm0.02$; log $K_2=8.91\pm0.04$

log $K_3=5.68\pm0.91$

and

Al (III) : log $K_1 . K_2=18.41\pm0.03$

हिपूरिक अम्ल (N-बेन्ज्वाएल ग्लाइसीन) एक शक्य कीलेटकारक है और इसके कुछ संकरों का निर्माण और उनकी संरचनाओं का अध्ययन पूर्व प्रकाशनों [1–5] में किया जा चुका है। परन्तु साहित्य से प्रदर्शित होता है कि अभी तक विलयन में हिपूरिक अम्ल के धातु संकरों के निर्माण तथा उनके स्थायित्व का अध्ययन बहुत ही कम हुआ है[6–8]। प्रस्तुत शोध प्रपत्र में हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg(II), V (IV) तथा Al (III) के संकरों के स्थायित्व स्थिरांकों का अध्ययन इरविंग तथा रसोटी[9] की विभवमापी विधि द्वारा किया गया है।

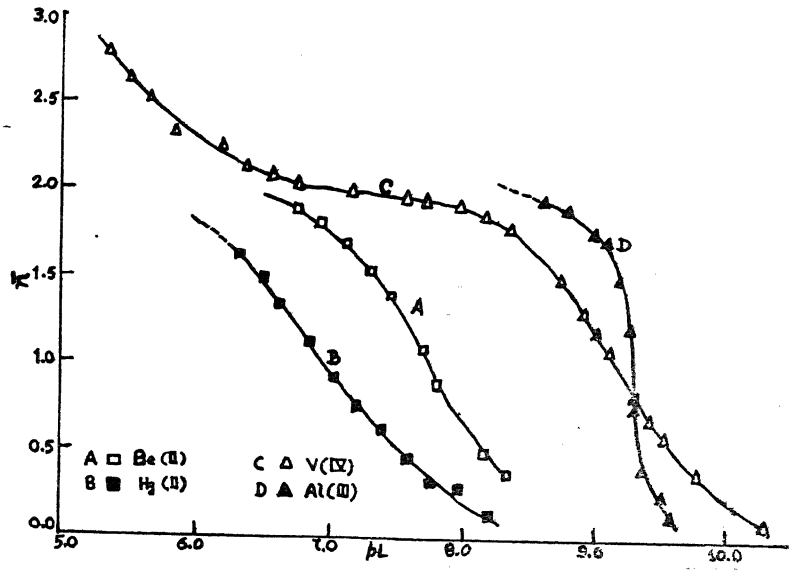
प्रयोगात्मक

अम्ल, अम्ल तथा लिगैंड और अम्ल, लिगैंड तथा धातु आयनों के मिश्रणों का अलग-अलग अनुमापन 0.1 M NaOH विलयन के द्वारा एक दोहरे दीवार वाले अनुमापन क्लास्क में विभवमापी

विधि द्वारा स्थिर तापमान पर किया गया है। प्रत्येक बार मिश्रण का कुल आयतन 50 ml रखा गया और उसकी आयनिक सांद्रता सोडियम परक्लोरेट को मिलाकर 0.1 M स्थिर रखी गयी। कार्बन डाइ-आक्साइड से मुक्त करने के लिए विलयन में पहले तथा अनुमापन के समय शुद्ध नाइट्रोजन को प्रवाहित किया गया। pH के मापन के लिए लीड्स-नार्थरप का pH-मापी प्रयोग में लाया गया।

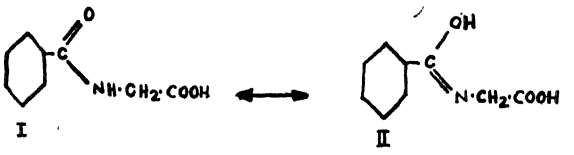
परिणाम तथा विवेचना

खुर्गिन[10] तथा उनके सहयोगियों ने हिप्यूरिक अम्ल के pk का मान 20 प्रतिशत डाइआक्सेन के माध्यम में 3.98 ज्ञात किया है। जलीय विलयनों में हिप्यूरिक अम्ल के pH अनुमापन वक्र एक तुल्यांक क्षार पर पहला स्पष्ट नति परिवर्तन प्रदर्शित करते हैं। इस नति परिवर्तन के पश्चात् अम्ल तथा लिगैंड के वक्रों का pH 10 के बाद के क्षेत्र में अध्ययन करने से यह प्रतीत होता है कि दोनों वक्रों में सापेक्ष अन्तर एक तुल्यांक क्षार से अधिक की ओर अग्रसर होता जाता है जो यह प्रदर्शित करता है कि pH के उच्च मानों पर एक दूसरा प्रोटान भी वियोजित होता है। इसके अतिरिक्त इर्विंग तथा रसोटी की विधि द्वारा प्रोटानीकरण स्थिरांक का परिकलन करने में यदि y का मान केवल एक लिया जाता है तो $\bar{n}$A का मान pH$\sim$5 पर शून्य हो जाता है जबकि धातु लिगैंड निकाय में संकर के अनुमापन वक्रों में सामान्यतः pH 5 के ऊपर ही अधिक सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं। जबकि यदि pH 5 पर $\bar{n}$A का मान शून्य हो जाए तो धातु लिगैंड निकाय के लिए $\bar{n}$ के मान का परिकलन सम्भव नहीं होगा।



चित्र 1

अतः यह स्पष्ट है कि हिप्यूरिक अम्ल में उच्च pH मान पर एक दूसरा प्रोटान भी वियोजित होता है और इस दशा में $\bar{n}$A के मान के परिकलन में $y=2$ का लिया जाना उचित है। अतः यह प्रस्तावित है कि हिप्यूरिक अम्ल एक अमीडो-इमीडाल चलावयवता (चित्र 2) प्रदर्शित करता है तथा pH के बढ़ते मानों के साथ इमीडाल चलावयवी की प्रधानता होती जाती है।



चित्र 2

सर्वप्रथम-COOH समूह का एक प्रोटान pH~3.5 पर वियोजित हो जाता है और हाइड्राक्सिल समूह सम्बन्धी दूसरे प्रोटान का वियोजन उच्च pH मान पर होता है। हिपूरिक अम्ल के अवरक्त स्पेक्ट्रम में तृतीयक एल्कोहालीय समूह[11] के क्षेत्र में 1175 cm^{-1} पर एक अवशोषण बैंड प्राप्त होती है जो कि इसकी संरचना में $-\underset{\diagdown}{\overset{|}{\underset{/}{C}}}-OH$ समूह की उपस्थिति का प्रमाण है। तृतीयक एल्कोहल में-OH विरूपण आवृत्ति के लिए 1150 cm^{-1} के समीप एक बैंड प्राप्त होता है और फीनोल में मेक और रोज़मी[12] ने 1180 cm^{-1} की बैंड को सर्वाधिक OH प्रकृत्रि प्रदर्शित करने वाला बैंड माना है।

प्रयोगात्मक क्षेत्र (pH 3—11) में ($y=2$) के आधार पर A की गणना के मान 1·8-0·6 के परिसर में प्राप्त हुए हैं। इनके द्वारा K_2H का परिकलन सरलता से किया जा सकता है। परन्तु चूंकि $\bar{n}A$ न्यूनतम मान केवल 0.6 तक ही प्राप्त हो पाया है अतः इनके द्वारा K_1H का यथार्थ मूल्यांकन नहीं किया जा सकता। अतः प्रोटानीकरण स्थिरांकों के मानों का परिकलन बीजगणितीय विधि (Algebraic Method)[13] द्वारा किया गया है। इस प्रकार $\log K_1H = 11.03$ और $\log K_2H = 3.58$ प्राप्त हुए हैं।

धातु-लिगैंड निकायों के pH अनुमापन वक्र प्रदर्शित करते हैं कि Be (II) और V (IV निकायों में विलयन पूर्णतया स्वच्छ रहते हैं और सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं। Hg (II) निकाय के pH~7.2 पर तथा Al(III) निकाय में pH~5 पर अवक्षेपण होता है परन्तु अवक्षेपण प्रारम्भ होने में पूर्व इन निकायों में भी पर्याप्त सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं।

$\bar{n}$ के परिकलनों से Be (II), Hg (II) और Al (III) निकायों [Hg (II) तथा Al (III) निकायों में अवक्षेपण बिन्दु से पूर्व) के लिए $\bar{n}$ का अधिकतम मान लगभग 2 प्राप्त हुआ है जबकि V(IV) निकाय के लिए इसका मान बढ़कर 3 के लगभग हो जाता है (चित्र 1)। अतः यह प्रदर्शित करता है कि Be (II), Hg (II) तथा Al (III) निकायो में केवल दो संकरों ML और ML_2 का निर्माण होता है जबकि V(IV) में तीन संकरों ML, ML_2 तथा ML_3 का निर्माण होता है। इनके क्रमबद्ध स्थायित्व स्थिरांकों का मान संशोधन पद विधि और उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। परन्तु Al (III) निकाय में चूंकि दोनों पद एकसाथ होते हैं अतः पूर्ण रासायनिक क्रिया के लिए केवल $K_1.K_2$ का मान एलबर्ट समीकरण[14](Albert's equation) द्वारा ज्ञात किया जा सका है। इन धातु संकरों का स्थायित्व क्रम V (IV)$\geqslant$Al (III)$>$Be (II) $>$Hg (II) प्राप्त होता है। इनमें स्थायित्व स्थिरांकसारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg (II), Al (III) तथा V (IV) संकरों के स्थायित्व स्थिरांक
(μ=0.1M $NaClO_4$; ताप=25°C)

धातु आयन	स्थायित्व स्थिरांक			
	log K_1	log K_2	log K_3	logβ_n
Be (II)	7.95±0.02	7.60±0.01	—	15.55±0.03
Hg (II)	7.36±0.03	5.60±0.03	—	13.96±0.05
V (IV)	9.39±0.02	8.91±0.04	5.68±0.01	23.98±0.07 log ($K_1.K_2$)
Al (III)	—	—	—	18.41±0.03

निर्देश

1. पीकर, पी० तथा सिगवर्ट, एस०, **जर्न० प्रैक्ट० केमि०**, 1941, **157**, 97.
2. ब्राउन, जे० एन० ट्रिकोनास, एल० एम०, **इन्मार्ग० केमि०**, 1973, **12**, 1730.
3. मार्कोट्रिगियाना, जे० तथा बेलासेनी, जी० सी० **जेड० एनार्ग० ऐल्ग० केमि०**, 1975, **415**, 268.
4. कुमार, जी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन० , **नेश० एकेड० साइंस लेटर्स**, 1978, **1**, 134.
5. कुमार जी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, **रिवयू डि किमी मिनरेल**, 1979, **16**, 14 ; विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, 1979, **22**, 229 , **नेश० एकेड० साइंस लेटर्स**, 1981, **4**, 129.
6. सिंह, एस० पी० तथा टंडन, जे० पी० , **मोंटांश**, 1975, **106**, 871.
7. सिशेव, ए० वाई० तथा टरवो, बी० एन०, **ज़ुर फिज़ रिवय**, 1979, **44**, 1, 93.
8. करेज़ीनसकी, एफ० , **ज़ेस्ग़ नौक० मैट० फिज केमि० वाइस्ज़ा स्ज़क० पेडागाग० ग्डान्सक्० वाइड्ज़०, मैट० फिज० केमि०**, 1967, 7, 149.
9. इर्विंग, एच० तथा रसोटी, एच० एस० , **जर्न० केमि० सोसा०** 1953, 3397 ; 1954, 2904.
10. खुर्गिन, आई० वाई० तथा विरबा, आई० वी० , **इज़ो० एकैड० नौक एस० एस० एस० आर, सर० रिवम०**, 1968, **6**, 1245.

11. बेलेमी, एल० जे० ; The Infrared Spectra of Complex Molecules, जॉन० एफ० विले० एण्ड सन्स, न्यूयार्क, 1962.

12. मेक, आर० तथा रोजमी, जी० , **जेड० इलेक्ट्रो केमि०**, 1955, **59**, 866.

13. रिचर्ड, सी० एफ०, गुस्ताक्सन, आर० एल० तथा मार्टेल, ए० ई० , **जर्न० केमि० सोसा०**, 1959, **81, 1033**.

14. एलबर्ट, ए० ; **बायो केमि० जर्न**, 1953 **54**, 646.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

Editor
Dr. Chandrika Prasad
D. Phil.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 April 1990 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी, उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद

विषय-सूची

1. कृत्रिम जलाशय तथा भूकम्प : विश्वव्यापी स्थिति
हर्ष के गुप्ता 67

2. सिडान-टेल्याकोप्सकी प्रमेय का सामान्यीकरण
सुशील शर्मा 79

3. बहुचर H-फलन वाला एक समाकल
आर० के० सक्सेना तथा चैना राम 87

4. अधिशोषण द्वारा निकिल का उसके जलीय विलयनों से बिलगन : ताप का प्रभाव
योगेश चन्द्र शर्मा, गुरू प्रसाद तथा दिनेश चन्द्र रूपैनबार 95

5. लारिसेला फलनों वाले कतिपय द्विपार्श्वजनक फलन
एच० सी० अग्रवाल तथा ऐ० के० अग्रवाल 103

6. A-फलनों के समाकल
राजपाल सिंह, मुकेश सिंहल तथा योगेन्द्र कुमार शर्मा 109

7. प्रत्यावर्ती धारा नीरव-विद्युत विसर्जन में काँच पृष्ठ के समीप वैद्युत द्विस्तर का निर्माण
जगदीश प्रसाद 117

8. माइजर का G-फलन तथा राविन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दण्ड में ऊष्मा चालन
एस० डी० बाजपेयी 121

9. उराँव जनजाति की कुछ मानवमितीय नापों के पारस्परिक सहसम्बन्धों का अध्ययन
चतुर्भुज साहू 129

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No.2, 1990

कृत्रिम जलाशय तथा भूकम्प : विश्वव्यापी स्थिति

हर्ष के० गुप्ता
कोचिन यूनिवर्सिटी आफ साइन्स एण्ड टेक्नालाजी
कोचीन-682022

सारांश

जलविद्युत शक्ति, बाढ़ नियंत्रण तथा सिंचाई कार्यों के लिए सारे विश्व में बृहद कृत्रिम जलाशय बनाये जाते हैं। सर्वप्रथम कार्डर ने भूकम्प का सम्बन्ध जलाशय भारण के साथ जोड़ा। अब तक जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता में होने वाले परिवर्तनों के लगभग 80 उदाहरण ज्ञात हैं। हमारे शोधकार्य से वे कसौटियाँ निकाली जा सकी हैं जिससे प्राकृतिक भूकम्पों तथा प्रेरित भूकम्पों में अन्तर बतलाया जा सकता है। इन कसौटियों का सम्प्रयोग अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर हो रहा है।

Abstract

Artificial water reservoirs and earthquakes : A world wide status. *By* Harsh K. Gupta, Cochin University of Science and Technology, Cochin-682022.

Huge artificial water reservoirs are created all over the world for generation of hydroelectric power, flood control and irrigation purposes. Carder (1945), for the first time pointed out the association of earthquakes with reservoir loading at Lake Mead in United States. By now some eighty examples of reservoir induced changes in seismicity (R I S) are known. The work carried out by us led to generation of criteria to differentiate natural earthquakes from induced earthquakes. These criteria are now internationally applied.

प्रायः यह प्रश्न पूछा जाता है कि हिमालय के जलाशयों के कारण भूकम्प क्यों उत्पन्न नहीं होते ? हिमालय की पाद-पहाड़ियों में प्रेरित भूकम्प न आने का कारण मूलतः क्षेप-भ्रंश परिवेश thrust fault

---

3 फरवरी 1990 को कोचिन में साइंस कांग्रेस अधिवेशन के अवसर पर अनुसंधान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षीय भाषण।

environment) है जो जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के अनुकूल नहीं है। किन्तु ये बाँध उच्च भूकम्पनीयता के क्षेत्रों में स्थित हैं जहाँ 7 या अधिक मात्रा के भूकम्प आ चुके हैं।

जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता (RIS) की विश्वव्यापी स्थिति

सर्वप्रथम कार्डर ने[1] 1945 ई० में संयुक्त राज्य अमरीका की मीड झील के लिए भूकम्पों का सम्बन्ध कृत्रिम जलाशयों के भारण (Loading) के साथ इंगित किया। 1960 के दशक के मध्य लगभग एक दर्जन ऐसी जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताएँ ज्ञात थीं। 10 दिसम्बर 1967 को कोयना बाँध के निकट 6·3 मात्रा का भूकम्प आया तो विश्व भर के इंजीनियरों तथा भू-विज्ञानियों का ध्यान जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की ओर आकृष्ट हुआ। 1968 में रोथे ने[2] एक लेख लिखा, "झील को भरिए, भूकम्प चालू कीजिए।" अभी तक जलाशयों से सम्बद्ध जितने भी भूकम्प आये हैं उनमें 1967 का कोयना भूकम्प अभी भी सबसे बड़ा तथा सर्वाधिक विनाशकारी भूकम्प है जिसने कोयना प्रोजेक्ट नगर को ध्वस्त कर दिया, जिसमें 200 जानें गईं; 1500 लोग घायल हुए और हजारों लोग घरबार रहित हो गये (गुहा इत्यादि[3])। तब से जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताओं की घटनाओं की सूची काफी बढ़ चुकी है (गुप्ता तथा रस्तोगी[4]) और 1985 में[5] जब अन्तिम संकलन हो रहा था तो लगभग 70 घटनाएँ ज्ञात थीं। इधर के वर्षों में कई अन्य घटनाओं की सूचना दी गई है (यथा जापान में नगवाडो तथा मैकियो) किन्तु अधिकांश जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की घटनाएँ लघु हैं और केवल चार भूकम्पों ने ही रिक्टर माप में 6 इकाई का अतिक्रमण किया है। ये हैं

1. चीन का जिंगफेंगकियांग जलाशय, मार्च 19, 1962, M 6.1
2. जाम्बिया-जिम्बावे में करीबा झील, सितम्बर 23, 1963 M 6.1
3. ग्रीस में क्रेमस्टा झील, फरवरी 5, 1965, M 6.2
4. भारत में, कोयना बाँध, दिसम्बर 10, 1967, M 6.3

5 से 5.9 मात्रा वाले उदाहरण सात हैं। मिस्र में असवान बाँध से निर्मित नासिर झील इस श्रेणी का सबसे ताजा उदाहरण है जहाँ झील को भरने के 17 वर्ष बाद 14 नवम्बर 1981 को M 5½ का भूकम्प आया[6]।

जिन जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताओं में 4-4.9 मात्रा वाले भूकम्प आये उनकी संख्या चौदह है और इस सूची में भटसा का नाम जुड़ा है जो बम्बई से लगभग 100 किमी० दूर है जहाँ 15 सितम्बर 1983 को 4.5 मात्रा का भूकम्प आया। यह भूकम्प जलाशय के तीव्र भारण के पश्चात् आया जिससे एक महीने में जल का स्तर 18 मीटर उठ गया। ऐसा भय हो रहा था (पाटिल इत्यादि[7]) कि कहीं कोयना जैसा काण्ड न हो जाय। किन्तु तब से मानीटरिंग चालू है और तब से 1983 जैसा कोई भूकम्प नहीं आया।

4 से कम मात्रा वाले उदाहरणों की संख्या अधिक है। जलाशयों के अवरोध के बाद द्रव इंजेक्शन / चूषण प्रेरित भूकम्पों के उदाहरण मिलते हैं तो उसी के साथ ऐसे भी उदाहरण जहाँ सूक्ष्म-

भूकम्प सक्रियता में ह्रास देखा गया। चित्र 1 में जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता का विश्वव्यापी वितरण दिखलाया गया है।

चित्र 2 को सिम्पसन के आधार पर नवीकृत किया गया है। उसमें सात अत्यन्त महत्वपूर्ण कम्पनीयताओं के लिए जलाशय तल, जलाशय के अवरोध तथा सबसे बड़ी कम्पनीयता घटना के बीच के अन्तराल तथा इसकी मात्रा को प्रदर्शित किया गया है। असवान बाँध को छोड़ कर शेष सारी भूकम्पनीयता की घटनाएँ जलाशयों के प्रारम्भिक अवरोधन के आठ वर्ष के भीतर ही घटीं। चित्र 3 में प्रथम भराव तथा भूकम्पनीयता घटना घटित होने के मध्य समय पश्चता के विरुद्ध पूर्वाभासी घटना की मात्रा तथा अवधि को भी दिखलाया गया है जिसे शोल्ट्ज इत्यादि ने[9] खोजा था। जहाँ तक जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता का प्रश्न है, भूकम्प की मात्रा तथा इसके घटित होने एवं जलाशय के अवरोधन के मध्य के अन्तराल में कोई सहसम्बन्ध प्रतीत नहीं होता।

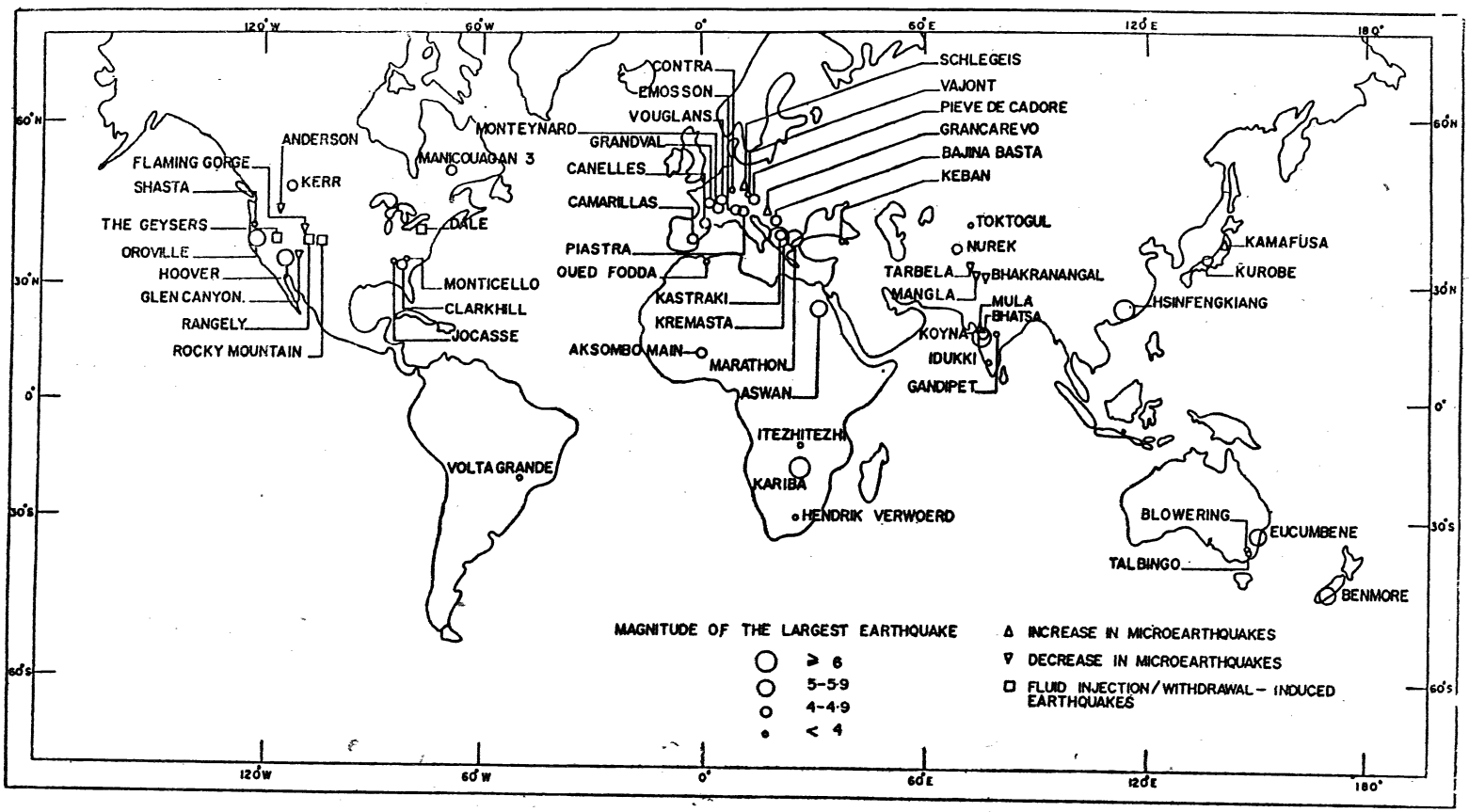
जलाशय प्रेरित-भूकम्पनीयता की सामान्य विशेषताएँ

कतिपय अग्रणी अध्ययनों द्वारा (गुप्ता इत्यादि[10,11]) जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की सामान्य विशेषताओं तथा सामान्य भूकम्पों से विभेद कराने वाले लक्षणों की पहचान की गई है। झील के भराव के बाद झटके (कंप) प्रारम्भ हुए या उनकी आवृत्ति में पर्याप्त वृद्धि हुई और झीलों से 25 किलोमीटर की सीमा के भीतर अधिकेन्द्रों की स्थिति पाई गई। झटकों को प्रभावित करने वाले कारकों में हैं—जल स्तर में वृद्धि की दर, भारण की अवधि, अधिकतम प्राप्तव्य जल स्तर तथा वह अवधि जिसमें उच्च जल स्तर बना रहता है। जलाशय प्रेरित कम्पनीयता अनुक्रम में सबसे बड़े उत्तरघात एवं प्रमुखघात का अनुपात उच्च (~ 0.9) है और आवृति-मात्रा सम्बन्धों में b मान उच्च हैं जो सम्बद्ध क्षेत्रों में सामान्य भूकम्पों के विपरीत है। पूर्वघात-उत्तरघात पैटर्न मोगी के माडल के टाइप II के संगत है जबकि इन क्षेत्रों में सामान्य भूकम्प अनुक्रम टाइप I के समान होते हैं। जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के उत्तरघात सामान्य भूकम्पों की तुलना में अपेक्षतया दीर्घतर अवधि तक बने रहते हैं। बड़ी भूकम्पनीयता की घटनाओं के लिए सामान्य भ्रंश परिवेश में भ्रंश गति का नति सर्पण घटक ऐसा होता है कि झीलें नीचे फेंके गये खण्डों में स्थित होती हैं। कम्पनीयता के स्थल ऐसे क्षेत्रों में स्थित होते हैं जहाँ भूकम्प बीत जाने के बाद शैलों की उपस्थिति पाई जाती है यथा चूनापत्थर तथा लाल बोल जो कि जल द्वारा संक्षारित होते रहते हैं।

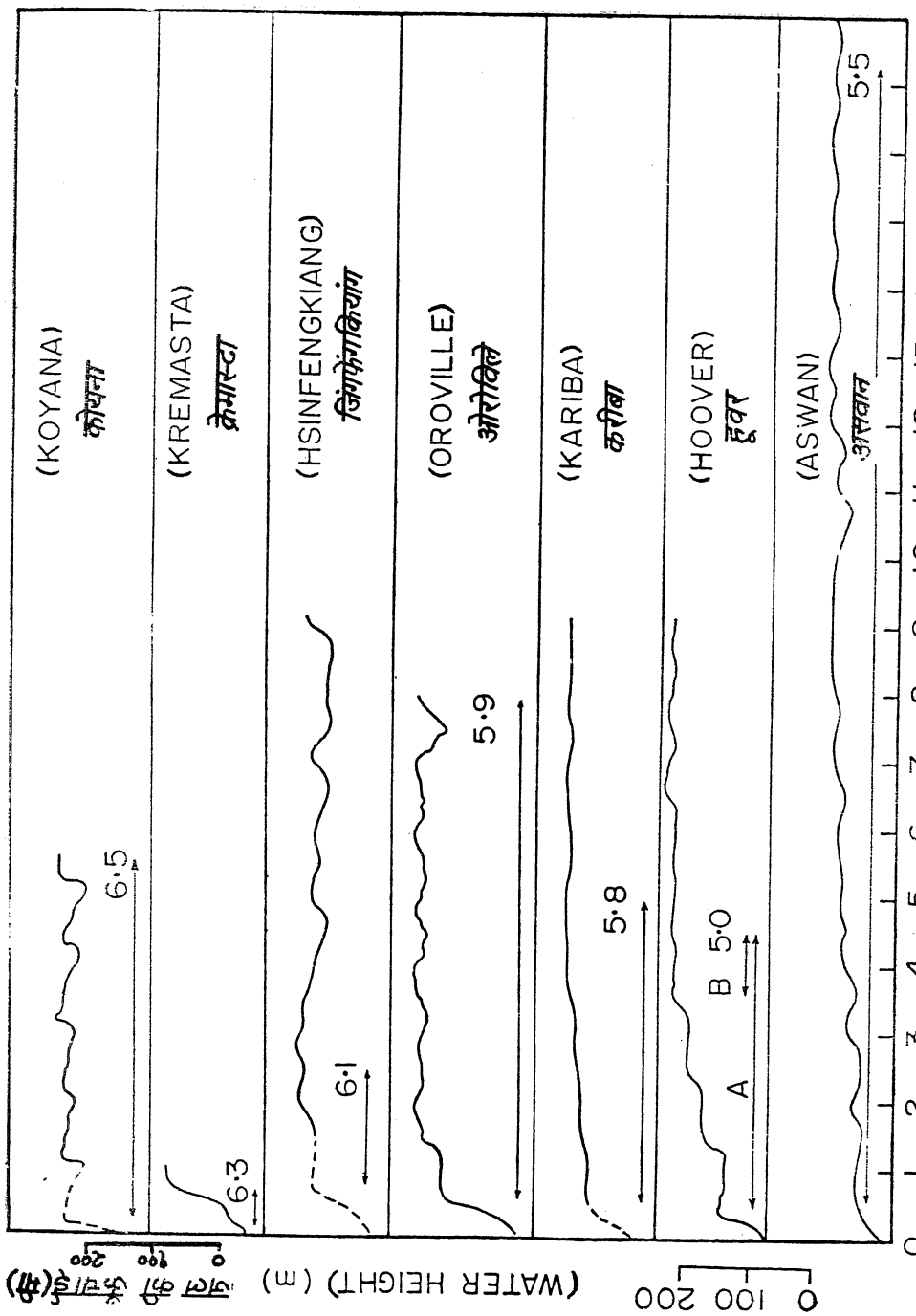
जलाशय में जल स्तम्भ की ऊँचाई जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता को प्रेरित करने वाला प्रमुख कारक प्रतीत होती है। 5 या इससे बड़ी मात्रा वाली अधिकांश भूकम्पनीयता की घटनाएँ उन जलाशयों के निकट घटीं जहाँ जल स्तम्भ की ऊँचाई 100 मीटर पार कर गई। चित्र 4 से इस तथ्य का स्पष्टीकरण होता है जिसे स्टुअर्ट-अलेक्जैंडर तथा मार्क के आधार पर बनाया गया है[12]।

जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता तथा हिमालय के जलाशय

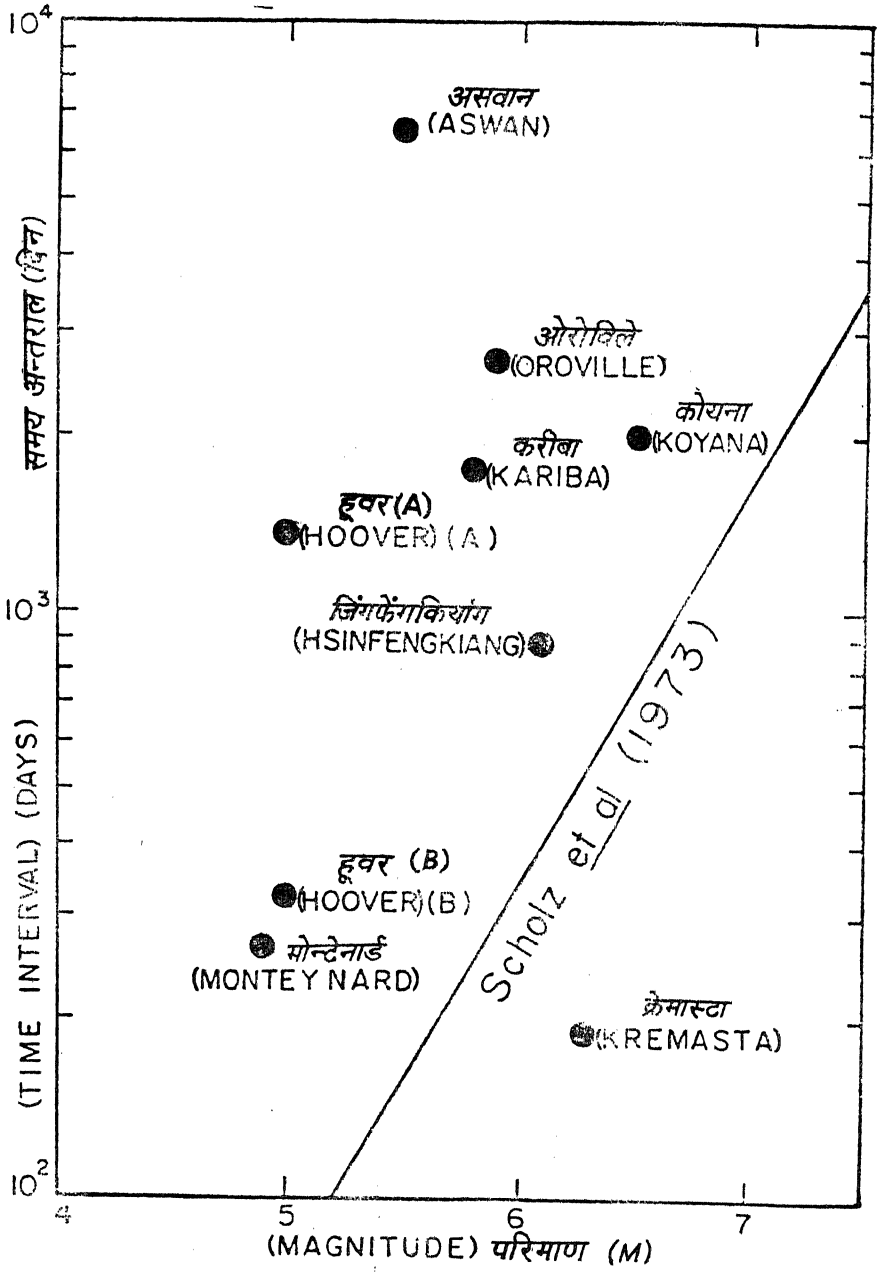
भूकम्प की अल्पाइड पट्टी भारत उपमहाद्वीप के उत्तर से होकर गुजरती है। हिमालय की फ्रंटल आर्क, जिसके पश्चिम में चमन भ्रंश है तथा पूर्व में अराकानयोमा है, भूकम्पन की दृष्टि से



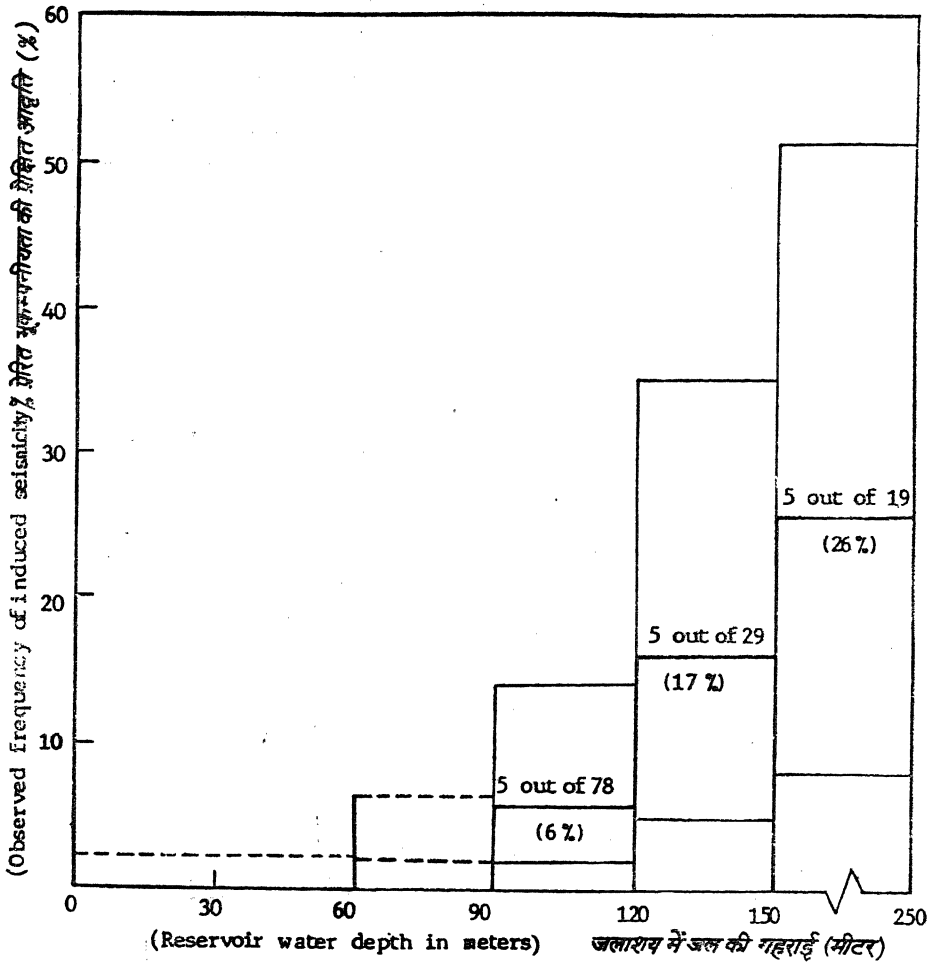
चित्र 1. भूकम्पनीयता में जलाशय प्रेरित परिवर्तनों का विश्वव्यापी वितरण (गुप्ता[5])



चित्र 2. सात प्रमुख जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता घटनाओं के लिए जलाशय भराव वक्र, समय अन्तराल तथा सबसे बड़ी भूकम्पनीयता घटना की मात्रा केवल आपेक्षिक ऊँचाइयां दी गई हैं। टूटी रेखाएँ प्रकाशित आंकड़ों की अनिश्चितता बताती हैं। तीरों से चित्र 3 में प्रयुक्त समय अन्तराल सूचित होता है।

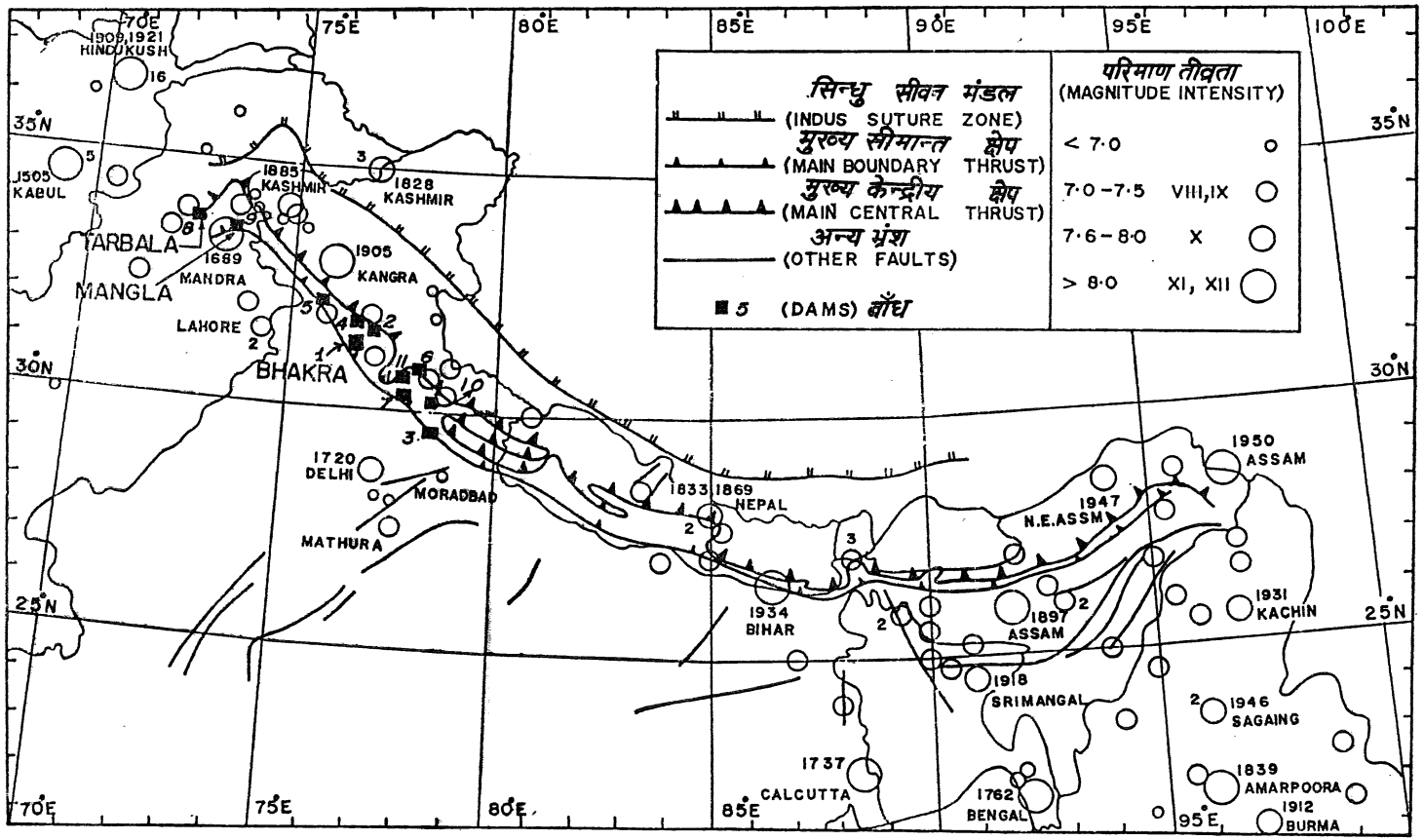


चित्र 3. भराव की प्रथम अवस्था तथा सबसे बड़ी भूकम्पनीयता घटना होने के मध्य समय में देरी। समय अन्तराल चित्र 2 में दिखाये गये तीरों की लम्बाई के संगत है। हूबर के लिए दो समय अन्तराल दिये गये हैं—*A* तथा *B*। *A*=भराव की प्रथम अवस्था पूरी होने के बाद समय। *B*=पहली बार अधिकतम जल स्तर पहुँचने के बाद का समय अन्तराल। भूकम्प मात्रा तथा पूर्वाभास की अवधि भी दिखलाई गई है (शोल्ज सम्बन्ध 1973)।



चित्र 4. अवरुद्ध-प्रेरित भूकम्पनीयता (भूकम्प मात्रा $\geqslant 3$) से सम्बद्ध जलाशयों की प्रेक्षित आवृत्ति प्रतिशतता प्रदर्शित करने वाला हिस्टोग्राम (मोटी रेखाएँ)।

विश्व का सर्वाधिक सक्रिय अन्तरामहाद्वीपीय क्षेत्र है। चित्र 5 को चन्द्रा[13] के आधार पर आधुनिक बनाया गया है। यह 7 या इससे अधिक मात्रा वाले समस्त भूकम्पों के अधिकेन्द्रों का चित्रण तो करता ही है साथ ही उन सारे भूकम्पों को बतलाता है जो हिमालयन फ्रंटल आर्क, अराकानयोमा तथा पश्चिमी अक्षसंधि में आये हैं और जिनसे तमाम जानें गई हैं। इस चित्र में हिमालय की पाद-पहाडियों में पूर्ण किये जा चुके या बनाये जा रहे जलाशयों को भी प्रदर्शित किया गया है। इंजीनियरों की बोली में कोई कृत्रिम जलाय वृहद जलाशय कहलाता है यदि जल का आयतन 1 किमी०^3 से अधिक हो या जलाशय में जल स्तम्भ की ऊँचाई 100 मीटर से अधिक हो। गुप्ता तथा राजेन्द्रन[14] ने यह इंगित किया है कि ऐसे



चित्र 5. हिमालय तथा उसके आस-पास का अधिकेन्द्र मानचित्र जिसमें $\geqslant$7.0 मात्रा वाले भूकम्पों के साथ ही कुछ अर्वाचीन भूकम्पों को दिखलाया गया है जिनसे जानें गई हैं। 100 मीटर से अधिक ऊँचाई वाले बांधों को पूरित वर्गों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। संख्याएँ सारणी 1 में आई संख्याओं के संगत हैं।

11 वृहद जलाशयों में से 9 को पहले ही अवरुद्ध किया जा चुका है (सारणी 1) किन्तु इन 9 स्थानों में से किसी से भी भूकम्पनीयता की घटना की सूचना प्राप्त नहीं है। हां, तारबेला जलाशय में प्रारम्भिक भराव के बाद बांध स्थान से 100 किमी० दूरी तक भूकम्पनीयता में अल्प ह्रास देखा गया (जैकोब इत्यादि[15]) गुप्ता तथा राजेन्द्रन ने[14] सीमित उपलब्ध आंकड़ों, के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला है कि सामान्यतया हिमालय के जलाशय भूकम्पों को प्रेरित नहीं करते। किन्तु यह ध्यान में रखना होगा कि इनमें से अनेक जलाशय हाल ही में अवरुद्ध किये गये हैं और रन्ध्र-दाब-विसरण का बिलम्बित प्रभाव[16]; कालान्तर में ही सार्थक हो सकता है।

सारणी 1

हिमालय की नदियों पर 100 मी० से अधिक ऊँचाई वाले बांध

क्रमांक	बांध	नदी	ऊँचाई (मी०)	जलाशय आयतन $10^6 \times m^3$	बांध आयतन $10^3 \times m^3$
1.	भाखरा	सतलज	226	9868	4130
2.	पंडोह	ब्यास	116	8141	32310
3.	कालागढ़	रामगंगा	126	2369	13507
4.	पांग	व्यास	133	8570	
5.	थीन	रावी	147	3300	
6.	कोठार	कोसी	155	4080	
7.	किशाउ	टोंस	253	2400	
8.	तर्बला	सिन्धु	143	1367	142000
9.	मंगला	झेलम	118	7250	64491
निर्माणाधीन					
10.	टेहरी	भागीरथी	261	3539	
11.	लखवार	यमुना	192	580	

हिमालय के जलाशयों के आस-पास भूकम्पनीयता की घटनाएँ न होने की कारण वहां पर पाया जाने वाला क्षेप भ्रंश परिवेश हो सकता है जो जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के लिए हितकर नहीं है। यही नहीं, ऐसी भूकम्पनीयता के लिए प्राथमिक आवश्यकता है क्रान्तिक रूप से प्रतिबलित शैल स्तर का कम गहराई (~ 10 किमी०) में उपलब्ध होना जिससे रंध्र द्रव दाब बढ़ता है या जलाशय भारण के कारण बर्धित प्रतिबल से भूकम्प असफल हो जाता है। हिमालय की पाद पहाड़ियों में यांत्रिकी दृष्टि से अपेक्षतया अक्षम अवसादी निर्माण का मोटा स्तर रहता है उपर्युक्त प्रतिबन्ध पूरा नहीं हो पाता।

गुप्ता तथा राजेन्द्रन ने यह भी संकेत किया है कि हिमालय के जलाशयों में प्राकृतिक रूप से आने वाले भूकम्प के खतरे की मात्रा जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता से अधिक निकट है। भूतकाल में हिमालय के बांध वाले स्थानों के आस-पास अनेक बड़े-बड़े भूकम्प आ चुके हैं। इन जलाशयों के जीवन काल में ही ऐसे भूकम्प आ सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं श्री शशिधरन के प्रति इस पाण्डुलिपि की तैयारी में सहयोग देने के लिए कृतज्ञ हूँ।

निर्देश

1. कार्डर, डी० एस०, Seismic investigations in the Boulder Dam area, 1940-1944, and the influence of Reservoir loading on Earthquake activity, Bull. Seismol. Soc. Am., 1945, **35**, 175.

2. रोथे, जे० पी०, Fill a Lake , Start an Earthquake, New Sci. 1968, **39**, 75.

3. गुहा, एस० के०, गोसावी, पी० डी०, वर्मा, एम० एम०, अग्रवाल, एस० पी०, पडाले, जे० जी० तथा मारवाडी, एस०सी०, Recent seismic disturbances in the Koyna Hydroelectric Project, Maharashtra, India. Report, Central Water and Power Research Station, India 1968.

4. गुप्ता, एच० के०, तथा रस्तोगी, बी० के०, Dams and Earthquakes, Amsterdam, Elsevier, 1976.

5. गुप्ता, एच० के० The present status of reservoir induced seismicity investigations with special emphasis on Koyna Earthquake, Tectonophysics, 1985, **118**, 257.

6. केबीसी, आर० एम०, मामून, एम०, इब्राहीम, ई०, मेगाहेड, ए०, सिम्पसन, डी० डब्लू० तथा लीथ, डब्लू० एस०, Earthquake Studies at Aswan Reservoir, Jour. Geodynamics, 1987, **7**, 173.

7. पाटिल, डी० एन०, भोसले, वी० एन०, गुहा, एस० के० तथा पावर, के० बी०, Reservoir induced seismicity in the vicinity of Lake Bhatsa, Maharashtra, India, Phys. Earth and Planet. Inter., 1986, **44**, 73.

8. सिम्पसन, डी०डब्लू०, Seismicity changes associated with Reservoir Loading, Eng. Geol, 1976, **10**, 123.

9. शोल्ज, सी० एच०, साइक्स, एल० आर० तथा अग्रवाल, वाई०पी०, Earthquake Prediction: a Physical Basis, Science, 1973, **181**, 803.

10. गुप्ता, एच० के०, रस्तोगी, वी० के० तथा हरिनारायण, Some discriminatory characteristics of Earthquakes near the Kariba, Kremasta and Koyna Artificial Lakes, Bull. Seism. Soc. Am., 1972 b, **62**, 493.

11. वही, Common features of the Reservoir associated Seismic activities, Bull. Seism. Soc. Am., 1972 a, **62**, 481.

12. स्टुआर्ट-अलेक्जैंडर, डी० ई० तथा मार्क, आर० के०, Impoundment-induced Seismicity associated with Large Reservoirs, U. S. Geological Survey, Open File Report 1976, **76**, 770.

13. चन्द्रा, यू०,Seismicity, Earthquake Mechanisms and Tectonics along the Himalayan mountain range and vicinity, Phys. Earth. Planet. Inter., 1978, **6**, 109.

14. गुप्ता, एच० के० तथा राजेन्द्रन, के०, Larger artificial water reservoirs in the vicinity of the Himalayan foothills and reservoir-induced seismicity, Bull. Seismo. Soc. Am., 1986, **76**, 205.

15. जैकोब, के० एच०, पनिंगटन, डब्लू० डी०, आर्मब्रस्टर, जे०, सीवर, एल० तथा फर्हतुल्ला, एस० Tarbela reservoir, Pakistan : A region of compressional tectonics with reduced Seismicity upon initial Reservoir'filling, Bull. Seism. Soc. Am., 1979, **69**, 1175.

16. तलवानी, पी० तथा अक्री, एस०, Pore Pressure diffusion and the Mechanism of Reservoir Induced Seismicity, Bull. Seism. Soc, Am. (प्रेस में).

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

सिडान-टेल्याकोव्सकी प्रमेय का सामान्यीकरण

सुशील शर्मा

गणित विभाग, शासकीय कालिदास कन्या महाविद्यालय,
उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 10, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में विख्यात सिडान-टेल्याकोव्सकी प्रमेय का सामान्यीकरण इसके समाकलनीयता प्रतिबन्ध के स्थान पर पर्याप्त दुर्बल प्रतिबन्ध रखकर किया गया है।

Abstract

Genralizations of the Sidon-Telyakovskii theorem. *By* Sushil Sharma, Department of Mathematics, Government Kalidas Girls College, Ujjain (M.P.)

In this paper we generalize the well-known Sidon-Telyakovskii theorem by replacing its integrability condition by a considerably weaker condition.

1. प्रस्तावना

टेल्याकोव्सकी[4] ने कोज्या श्रेणी की सिडान समाकलनीयता का एक संक्षिप्त समतुल्य रूप ज्ञात किया। उसने वास्तविक शून्य अनुक्रम के वर्ग S की परिभाषा दी है। वास्तविक शून्य अनुक्रम $\{a_n\}$ S से सम्बद्ध होता है यदि कोई ऐसा एकदिष्ट अनुक्रम होता है जिससे

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$$

तथा

$$|\triangle a_n| \leqslant A_n \tag{1.1}$$

समस्त n के लिए।

सिडान-टेल्योकोव्सकी प्रमेय कहता है कि यदि $\{a_n\} \in S$ तो श्रेणी

$$a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

अपने योगफल f की फूरियर श्रेणी है तथा

$$||S_n(f)-f||=0(1),\ n\to\infty,$$

समतुल्य है $a_n \lg n=0(1),\ n\to\infty$ के जहाँ

$$S_n(f)=S_n(f,\ x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{n} a_k \cos kx$$

तथा $||.||$ सूचक है $L^1\ (0,\ \pi)$-norm का।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य (1.1) को निम्नलिखित प्रतिबन्ध में दुर्बल बनाना है

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} \frac{|\triangle c(k)|^p}{A_k{}^p}=O(1),\ n\to\infty \tag{1.2}$$

जहाँ $1/2<\alpha\leqslant 1$ तथा $p>1$, $\{A_n\}$ एक ऐसा एकदिष्ट अनुक्रम है कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n<\infty$$

तथा $\{c(n)\}$ संमिश्र संख्याओं का शून्य अनुक्रम है। संमिश्र त्रिकोणमितीय श्रेणी

$$\sum_{|n|<\infty} c(n)\ e^{int},\ t\in T=R|2\pi Z,$$

के ज्या अंश को नियन्त्रित करने के लिए विशेष प्रतिबन्ध की आवश्यकता है। संमिश्र शून्य अनुक्रम $\{(u)_\nu\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\triangle c(n)-c(-n)|.$$

$\lg n<\infty$, की तुष्टि करता है यह दुर्बल सम है। स्पष्ट है कि यदि $\{c(n)\}$ एक सम अनुक्रम हो तो हय दुर्बल सम होता है।

सम्मिश्र त्रिकोणमितीय रूपान्तर

$$\sum_{|n|<\infty} c(n)\, e^{int}$$

के आंशिक योगफलों को

$$S_n(c)=S_n(c,t)=\sum_{|k|\leqslant n} c(k)\, e^{ikt}$$

द्वारा व्यक्त किया जावेगा। यदि यह रूपान्तर किसी $f \in L^1$ का फूरियर हो तो हम $c(n)=\hat{f}(n)$ समस्त n के लिए तथा $S_n(c,t)=S_n(f,t)$ लिखेंगे।

हमें अपना परिणाम तैयार करने में निम्नलिखित परिभाषा उपयोगी होगी।

परिभाषा : संकुल संख्याओं का एक दुर्बल सम शून्य अनुक्रम $\{c(n)\}$ Sp^* से सम्बद्ध होता है जो किसी $1<p\leqslant 2$ तथा किसी एकदिष्ट $\{A_n\}$ के लिए हो जिससे कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A<\infty$$

तो प्रतिबन्ध (1.2) लागू होता है।

2. हम इस प्रपत्र में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : माना कि $\{c(n)\ S_p^*$, तो

(i) $t\neq 0$ के लिए $\lim_{n\to\infty} S_n(c,t)=f(t)$ का अस्तित्व है।

(ii) $f \in L^1(T)$;

(iii) $||S_n(f)-f||=0(1)$, $n\to\infty$

$|n|\to\infty$.

समतुल्य है $\hat{f}(n) \lg |n|=0(1)$ के

उपपत्ति : यह दिखलाने के लिए कि प्रतिबन्ध (1.2) का अर्थ (i) है, यह दिखाना काफी होगा कि $\{c(n)\}$ परिवद्ध विचरण वाला है। निस्सन्देह—

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta c(k)|=\sum_{k-1}^{n-1} [\Delta A_k] \sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta c(j)|}{A_j}+A_n \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta c(j)}{A_j}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha}[\Delta A_k]\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{j=1}^{k}\frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j{}^p}\right)^{1/p} + n^{\alpha} A_n \left(\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j{}^b}\right)^{1/p}$$

जहाँ $1/2<\alpha\leqslant 1$.

अतः $\{c(n)\}$ परिबद्ध विचरण का है तथा $t\neq 0$ के लिए $\lim_{n\to\infty} S_n(c, t)$ का अस्तित्व है। हम इस परिसीमा को $f(t)$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यह सिद्ध करने के लिए कि $f\in L^1(T)$ हमें गैरेट तथा स्टैनोजेविक[1, 2] द्वारा प्रचारित परिवर्धित त्रिकोणमितीय योगफलों के संकुल रूप की आवश्यकता होगी। माना कि $D_n(t)=\sin(n+1/2)t/(\sin t/2)$ संकुल दशा में डिरिक्लेट अष्टि को सूचित करता है तथा माना कि

$$E_n(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.$$

तो

$$S_n(c, t)-(c(n))\, E_n(t)+c(-n)\, E_{-n}(t)$$

$$g_n(c, t)=\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta(c(-k)-c(k))\,(E_{-k}(t)-1)-c(-n)+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta c(k)\, D_k(t).$$

(i) से यह निकलता है कि $t\neq 0$ के लिए

$$f(t)-g_n(c, t)=\sum_{k=n}^{\infty}\Delta c(k)\, D_k(t)+\sum_{k=n}^{\infty}(\Delta c(-k)-c(k))\, E_{-k}(t).$$

पिछले तत्समक से हमें

$$\|f-g_n(c)\|\leqslant \int_T \left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta c(k)\, D_k(t)\right| dt+B_1\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta(c(-k)-c(k))|\lg n,$$

आकलन प्राप्त होगा जहाँ B_1 चरम अचर है। चूँकि $\{c(n)\}$ दुर्बल रूप से सम है अतः उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर का दूसरा पद भी $0(1)$ ज्यों ज्यों $n\to\infty$। इस तरह

$$\|f-g_n(c)\|\leqslant B_2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta c(k)\, D_k(t)\right| dt+0(1),\ n\to\infty,$$

जहाँ B_2 एक चरम अचर है। अभी यह दिखाना शेष रह जाता है कि पिछली असमिका के दायीं ओर के समाकल का लोप हो जाता है ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

$t\neq 0$ के लिए निम्नलिखित तत्समक पर विचार करें

$$\sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \Delta A_k \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta c(j)}{A_j}\, D_j(t) - A_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta c(j)}{A_j}\, D_j(t)$$

तब

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) \right| dt \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \Delta A_k \int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt$$

$$+ A_n \int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt.$$

उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर के दोनों समाकलों का भी आकलन इसी प्रकार किया जा सकता है, अर्थात्

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = \int_0^{\pi/N} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt$$

$$+ \int_{\pi/N}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = I_N + J_N$$

डिरिक्लेट अष्टि के एकसमान आकलन को फिर से स्मरण करते हुए—

$$I_N \leqslant B_3 \sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|}{A_j} \leqslant B_3\, N^{\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j^p} \right)^{1/p}$$

जहाँ B_3 चरम अचर है। द्वितीय समाकल

$$J_N = \int_{\pi/N}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = \int_{\pi/N}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} \sin (j+\tfrac{1}{2})t \right| dt,$$

का मान निकालने के लिए सर्वप्रथम हम होल्डर असमिका का सम्प्रयोग करेंगे जहाँ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0,$$

$$J_N \leqslant \left[\int_{\pi/N}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin t/2} \right)^p dt \left[\int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} \sin(j+\tfrac{1}{2})t \right|^q dt \right]^{1/q} \right.$$

उसके बाद हौसडार्फ यंग की असमिका

$$J_N \leqslant B_4\, N^{1/q} \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{|\triangle c(j)|^p}{A_j{}^p}\right]^{1/p}$$

अन्त में

$$J_N \leqslant B_4\, N^{\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\triangle c(j)|^p}{A_j{}^p}\right)^{1/p}$$

जहाँ B_4 चरम अचर है। इस तरह

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \triangle c(k)\; D_k(t) \right| dt \leqslant B_5 \sum_{k=n}^{\infty} k \triangle A_k + B_6 n\, A_n$$

जहाँ B_5 तथा B_6 चरम अचर हैं। चूँकि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A < \infty,$$

अतः उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर के दोनों पद $0(1)$ हैं ज्यों ज्यों $n \to \infty$ इसलिए

$$||f - g_n(c)|| = 0(1),\ n \to \infty,$$

और चूँकि g_n एक बहुपद, इसका अर्थ हुआ कि f समाकलनीय है। इससे (ii) की उपपत्ति पूरी होती है।

अब (iii) की उपपत्ति

$$\left| ||f - S_n(f)|| = ||\hat{f}(n)\, E_n + \hat{f}(-n)\, E_{-n}|| \right| \leqslant ||f - g_n(c)|| = 0(1),\ n \to \infty.$$

से तथा [5] में इस तथ्य से कि

$$||\hat{f}(n)\, E_n + \hat{f}(-n)\, E_{-n}|| = 0(1),\ n \to \infty$$

समतुल्य है

$$\hat{f}(n) \lg |n| = 0(1),\ |n| \to \infty,\ \text{के}$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० बी० तिवारी का कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. गैरेट, जे० डब्लू तथा स्टैनोजेविक, सी० वी० Proc. Amer. Math. Soc. 1976, **54** 101-105.

2. वही, Proc. Amer. Math. Soc. 1976, **60**, 68-72.

3. सिडान, एस०, London Math. Soc. 1939, (2) **14**, 158-160.

4. टेल्याकोव्सकी, एस० ए०, Math. Notes. 1973, **14**, 742-748.

5. स्टैनोजेविक, सी० वी० तथा बैरी, डब्लू० ओ०, Trans. Amer. Math. Soc. 1983, **275**, 59-69.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

बहुचर H-फलन वाला एक समाकल

आर० के० सक्सेना तथा चेना राम
गणित तथा सांख्यिकी विभाग,
जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त—मई 6, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाइपरज्यामितीय फलन तथा श्रीवास्तव एवं पंडा के बहुचर H-फलन का मान गौतम तथा गोयल द्वारा परिभाषित r चरों वाले A-फलनों के पदों में निकालना है।

Abstract

An integral involving multivariable H-function. *By* R. K. Saxena and Chena Ram, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhpur (Rajasthan).

The object of this paper is to evaluate an integral involving hypergeometric function and a multivariable H-function due to Srivastava and Panda [8] in terms of A-function of r-variables defined by Gautam and Goyal [1]. The integral evaluated in this paper extends the result of Sharma [6],

1. प्रस्तावना

गौतम तथा गोयल[1] के अनुसार हम बहुचर A-फलन को निम्नवत् परिभाषित करते हैं :

$$A[z_1, \ldots, z_r] = A^{m, n; m_1, n_1; \ldots, m_r, n_r}_{p, q; p_1, q_1; \ldots; p_r, q_r}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix} (a_j; A_j', \ldots, A_j^{(r)})_1, p \\ (b_j; B_j', \ldots, B_j^{(r)})_1, q \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ; (\tau_j', C_j')_1, p_1; \ldots; (\tau_j^{(r)}, C_j^{(r)})_1, p_r \\ ; (d_j', D_j')_1, q_1; \ldots; (d_j^{(r)}, D_j^{(r)})_1, q_1 \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\theta_1(s_1)\ldots\theta_r(s_r)\,\phi(s_1, \ldots, s_r)\,z_1^{s_1}\ldots z_r^{s_r}\,ds_1\ldots ds_r \quad (1.1)$$

जहाँ

$$w = \sqrt{(-1)},$$

$$\theta_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m_i}(d_j^{(i)} - D_j^{(i)} s_i)\prod_{j=1}^{n_i}\Gamma(1-\tau_j^{(i)} + C_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=m_i+1}^{q_i}\Gamma(1-d_j^{(i)} + D_j^{(i)} s_i)\prod_{j=n_i+1}^{p_i}\Gamma(\tau_j^{(i)} - C_j^{(i)} s_i)}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\} \quad (1.2)$$

$$\phi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j + \sum_{i=1}^{r} A_j^{(i)} s_i)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j - \sum_{i=1}^{r} B_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} A_j^{(i)} s_i)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j + \sum_{i=1}^{r} B_j^{(i)} s_i)} \quad (1.3)$$

यहाँ पर $m, n, p, q, m_j, n_j, p_j$ तथा अनृण संख्याएँ हैं तथा समस्त

$$a_j's, b_j's, d_j^{(i)}'s, \tau_j^{(i)}'s, A_j^{(r)}'s, B_j^{(r)}'s$$

संमिश्र संख्याएँ हैं।

r चरों वाले A-फलन को परिभाषित करने वाला बहुगुण समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

$$\xi_i^* = 0, \eta_i > 0$$

तथा

$$|\arg(\zeta_i)\, z_k| < \frac{\pi}{2}\eta_i.$$

जहाँ

$$\zeta_i = \prod_{j=1}^{p} \left\{A_j^{(i)}\right\}^{A_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{} \left\{B_j^{(i)}\right\}^{-B_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{q_i} \left\{D_j^{(i)}\right\}^{D_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{p_i} \left\{C_j^{(i)}\right\}^{-C_j^{(i)}},$$

$$i \in \{1, \ldots, r\};$$

$$\xi_i^* = Im\left[\sum_{j=1}^{p} A_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{p_i} C_j^{(i)}\right],$$

$$i \in \{1, \ldots, r\};$$

$$\eta_i = R\left[\sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} B_j^{(i)} - \sum_{j=m+1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)}\right.$$

$$\left. - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)}\right],$$

$$i \in \{1, \ldots, r\}.$$

यदि हम $A_j's$, $B_j's$, $C_j's$, तथा $D_j's$ को वास्तविक तथा धनात्मक तथा $m=0$ मान लें तो A-फलन श्रीवास्तव तथा पण्डा[8] के बहुचर H-फलन में समानीत हो जाता है जो स्वयं भी सक्सेना[5] द्वारा दिये गये r-चरों वाले H-फलन का सार्वीकरण है।

A-फलन का विस्तृत विवरण गौतम तथा गोयल[1] के मूल प्रपत्र में देखा जा सकता है। इस सन्दर्भ में निर्देश [2, पृष्ठ 67-70] भी देखें।

2. वांछित परिणाम

अगले विश्लेषण में हमें निम्नलिखित समाकल [6, p. 140] की आवश्यकता होगी

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u+v+1); \delta;\right.$$

$$\left. 4\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right] dx$$

$$= (b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)\,\Gamma(\delta-u)\,\Gamma(\delta-v)} \qquad (2.1)$$

जहाँ

$$R(u) > 0,\ R(v) > 0,\ R(\delta-u-v) > 0,\ c<a<b.$$

3. समाकल

हम निम्नलिखित समाकल सिद्ध करेंगे

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}\,(b-x)^{v-1}\,(x-c)^{-u-v}\,{}_2F_1\left[\frac{1}{2}\,(u+v),\ \frac{1}{2}\,(u+v+1);\ \delta;\ 4R\right]$$

$$\times H[z_1X_1,\ \ldots,\ z_rX_r]\,dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1}\,(b-c)^{-u}\,(a-c)^{-v}\,\frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$\times A^{1,\ n+1;\ m_1,\ n_1;\ \ldots;\ m_r,\ n_r}_{p+2,\ q+2;\ p_1,\ q_1;\ \ldots;\ p_r,\ q_r}\left[\begin{array}{c|c} z_1 & I_1 \\ \vdots & \\ z_r & I_2 \end{array}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$R=\frac{(x-a)\,(b-x)\,(b-c)\,(a-c)}{[(x-c)\,(b-a)]^2}, \tag{3.2}$$

$$X_i=\left[\frac{(b-c)\,(x-a)}{(a-c)\,(b-x)}\right]^{\alpha_i},\ \forall\ i\in\{1,\ \ldots,\ r\} \tag{3.3}$$

$$I_1=(1-u;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r);\ (a_j;\ A_j',\ \ldots,\ A_j^{(r)})_{1,\ p};\ (\tau_{j'},\ C_j')_{1,\ p_1};$$

$$\ldots;\ (\tau_j^{(r)},\ C_j^{(r)})_{1,\ p_r};\ (\delta-u;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$$

$$I_2=(v;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r);\ (b_j;\ B_j',\ \ldots,\ B_j^{(r)})_{1,\ q};\ (d_j',\ D_j')_{1,\ q_1};$$

$$\ldots;\ (d_j^{(r)},\ D_j^{(r)})_{1,\ q_r};\ (1-\delta+v;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r).$$

(3.1) की वैधता के (पर्याप्त) प्रतिबन्ध नीचे दिये जा रहे हैं

(i) $$c<a<b,\ R(\delta-u-v)>0,\ R(u+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\xi_i)>0,$$

$$R(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\xi_i)>0,\ \alpha_j>0\,\forall j; \tag{3.4}$$

जहाँ $\xi_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant m_i} \left[R\left(d_j^{(i)}/D_j^{(i)}\right)\right]$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

(ii) $\Omega_i > 0$, $|\arg z_i| < \frac{1}{2}\Omega_i \pi$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, r\}$

जहाँ $\Omega_i \equiv - \sum_{j=n-1}^{p} A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} B_j^{(i)}$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} > 0, \ \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}.$$

(3.1) की उपपत्ति : समाकल **(3.1)** का मान निकालने के लिए सर्वप्रथम हम बहुचर H-फलन को बहुगुणित मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल (1.1) के पदों में ($m=0$ के समेत) व्यक्त करते है तथा s_i-समाकलों एवं x-समाकल के क्रम को परस्पर बदलने पर, जो दिए हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, (3.1) का वामपक्ष (मान लो Δ) निम्न रूप धारण करता है

$$\Delta = \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi(s_1, \ldots, s_r)\, \theta_1(s_1) \ldots \theta_r(s_r) z_1^{s_1} \ldots z_r^{s_r}$$

$$\times (b-c)^{\sum_{i=1}^{r} a_i s_i} (a-c)^{-\sum_{i=1}^{r} a_i s_i} \left[\int_a^b (x-a)^{u+\sum_{i=1}^{r} a_i s_i - 1}\right.$$

$$\left. \times (b-x)^{v-\sum_{i=1}^{r} a_i s_i - 1} (x-c)^{-u-v}\, {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u+v+1); \delta;\right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{4(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right] dx\right] ds_1 \ldots ds_r \qquad (3.5)$$

(2.1) की सहायता से x-समाकल का मान ज्ञात करने तथा प्राप्त परिणाम की व्याख्या r संमिश्र चरों वाले A-फलन के पदों में करने के पर सरलता से परिणाम निकल आता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि हम $n=p=q=0$ लें तो बहुचर H-फलन r H-फलन के गुणफलनों में टूट जाता है और हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}\,(b-x)^{v-1}\,(x-c)^{-u-v}\,{}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(u+v),\ \tfrac{1}{2}(u+v+1);\ \delta;\ 4R\right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} H_{p_i,\,q_i}^{m_i,\,n_i}\left[z_i X_i \left| \begin{matrix} (\tau_j^{(i)},\ C_j^{(i)})_1,\ p_i \\ (d_j^{(i)},\ D_j^{(i)})_1,\ q_i \end{matrix} \right.\right] dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1}\,(b-c)^{-u}\,(a-c)^{-v}\,\frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$\times A\begin{matrix}1,\ 1;\ m_1,\ n_1;\ \ldots;\ m_r,\ n_r \\ 2,\ 2;\ p_1,\ q_1;\ \ldots;\ p_r,\ q_r\end{matrix}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right] \tag{4.1}$$

जहाँ R तथा X_i क्रमशः (3.2) एवं (3.3) द्वारा परिभाषित हैं तथा

$$F_1=(1-u;\ a_1,\ \ldots,\ a_r);\ (\tau_j',\ C_j')_1,\ p_1;\ \ldots;\ (\tau_j^{(r)},\ C_j^{(r)})_1, p_r;$$

$$(\delta-u;\ a_1,\ \ldots,\ a_r).$$

$$F_2=(v;\ a_1,\ \ldots,\ a_r);\ (d_j',\ D_j')_1,\ q_1;\ \ldots;\ (d_j^{(r)},\ D_j^{(r)})_1,\ q_r;$$

$$(1-\delta+v;\ a_1,\ \ldots,\ a_r)$$

(4.1) की वैधता के (पर्याप्त) प्रतिबन्ध नीचे दिये जा रहे हैं :

(i) प्रतिबन्ध (3.4) लागू हो।

(ii) $\delta_i^* > 0,\ |\arg z_i| < \frac{1}{2}\,\delta_i^*\,\pi,\ \forall\ i \in \{1,\ \ldots,\ r\}$

जहाँ

$$\delta_i^* \equiv \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} > 0.$$

(ii) अन्त में यदि हम (4.1) में $r=1$ रखें तो यह शर्मा[6] द्वारा प्रदत्त परिणाम में समानीत हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक चेना राम सी० एस० आई० आर० के प्रति सीनियर रिसर्च फेलोशिप प्रदान करने हेतु कृतज्ञता व्यक्त करता है।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A (स्वीकृत)

2. गौतम, जी० पी० इत्यादि, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1986, **29**, 67-81.

3. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and Physical Sciences, Lecture Notes Series No. 348, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.

4. वही, The *H*-functions with Application in Statistics and Other Disciplines, John Wiley and Sons, New York, 1978.

5. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259.

6. शर्मा, आर० के०, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1987, **30**, 139-143.

7. श्रीवास्तव, एच० एम० इत्यादि The *H*-function of One and Two Variables with Applications, South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math., 1976, **288**, 129-145.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 2, 1990

अधिशोषण द्वारा निकिल का उसके जलीय विलयनों से विलगन : ताप का प्रभाव

योगेश चन्द्र शर्मा, गुरु प्रसाद तथा दिनेश चन्द्र रूपैनवार

प्रयुक्त रसायन विभाग, प्रौद्योगिक संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 14, 1989]

सारांश

जलीय विलयनों से वोलस्टोनाइट पर अधिशोषण द्वारा निकिल के विलगन की संभाव्यता का अध्ययन किया गया। विलयन की सान्द्रता 50 मिग्रा/लीटर, पी-एच 2.5 एवं 30° से० पर निकिल का विलगन अधिकतम पाया गया। अभिक्रिया ऊष्माक्षेपी है एवं ऊष्मागतिक अध्ययन में $\triangle G^\circ$, $\triangle H_\circ$ $\triangle S^\bullet$ के मान निकाले गए।

Abstract

Removal of nickel by adsorption on wollastonite : Effect of temperature. *By* Y. C. Sharma, G. Prasad and D. C. Rupainwar, Department of Applied Chemistry, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi-221 005.

Feasibility of nickel removal by adsorption on wollastonite has been studied. Maximum removal was observed at solution concentration of 50 mg/L, pH 2.5 and 30°C. The process of adsorption is exothermic and the parameters $\triangle G^\bullet$, $\triangle H^\circ$ and $\triangle S^\circ$ were studied mathematically in order to explain the process thermodynamically.

जीवधारियों पर निकिल के विषैले प्रभाव पूर्णतः प्रतिपादित हैं[1]। विभिन्न उद्योगों यथा धात्विक उपकरण निर्माण, बर्तनों पर कलई करने एवं अनेक संस्थानों में इस धातु का उपयोग बहुतायत से होता है। इन उद्योगों के अपशिष्ट जल के साथ नदियों एवं अन्य गतिमान जल स्रोतों में मिलकर निकिल जीवधारियों, वनस्पतियों एवं पर्यावरण पर हानिकारक प्रभाव डालता है। वाटरास इत्यादि[2] ने प्रयोगों

में पाया कि धात्विक आयन वनस्पतियों के लिए अत्यंत विषैला है। निकिल के प्रतिपादित विषैले गुणों में इसका कैंसरजन होना भी प्रमुख है[1] । सेयर ने[3] इसकी घातक सान्द्रता 50 माइक्रोग्राम प्रति लीटर निर्धारित की है।

अपशिष्ट जल के उपचार हेतु आयन-विनिमय, उपयुक्त अवक्षेपक द्वारा अवक्षेपण एवं विलायक-निष्कर्षण आदि प्रमुख विधियां हैं[4] परन्तु आजकल अधिशोषण जल उपचार की अत्यन्त लोकप्रिय तकनीक है[5,6]। विकसित देशों में अधिशोषण द्वारा जल से प्रदूषकों के विलगन हेतु सक्रियित चारकोल एवं सक्रियित कार्बन का उपयोग नियमित रूप से किया जा रहा है[7] परन्तु भारत जैसे विकासशील देश में सक्रियित कार्बन का प्रयोग औद्योगिक स्तर पर संभव नहीं है। इसी तथ्य को ध्यान में रखते हुए हमने अपनी प्रयोगशाला में सस्ते अधिशोषकों द्वारा अपशिष्ट जल एवं जलीय विलयनों से धात्विक एवं अन्य प्रदूषकों के विलगन का संभव प्रयास किया है[8,9] । प्रस्तुत निबन्ध में एक अत्यन्त सस्ते अधिशोषक, वोलस्टोनाइट, का उपयोग जल से निकिल के विलगन में किया गया है एवं विलगन पर ताप के प्रभाव पर प्रकाश डाला गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयोगों में प्रयुक्त सभी रसायन विश्लेषात्मक कोटि के थे एवं बी० डी० एच०, बम्बई द्वारा प्रदत्त थे। अधिशोषक वोलस्टोनाइट, वोल्केम प्रा० लि०, उदयपुर, राजस्थान द्वारा उपलब्ध कराया गया। अतिरिक्त व्यय को बचाने के लिए अधिशोषक को बिना किसी पूर्व-उपचार के, 100 माइक्रोमीटर व्यास की छिद्रयुक्त चलनी से मात्र छानकर प्रयोग किया गया। वोलस्टोनाइट के अन्य गुणों की परीक्षा मानक विधियों द्वारा की गयी[10]। प्रयोगों में प्रयुक्त निकिल की विभिन्न सन्द्रताओं के जलीय विलयनों का 50 मिली० आयतन उपर्युक्त अधिशोषक की 1.0 ग्राम मात्रा के साथ 30° से० ताप, पी-एच 2.5 पर बन्द पालीथीन बोतलों में 125 चक्र प्रति मिनट की दर से बन्द तापस्थापी में संतृप्तता तक हिलाया गया। प्राप्त विलयन को अपकेन्द्रित्र में 5000 चक्र प्रति मिनट की दर से अपकेन्द्रित करने के पश्चात् अधिशोषण की प्रगति, स्पेक्ट्रमी प्रकाशमापी (स्पेक्ट्रानिक 20, बाश एवं लोम्ब) द्वारा अधिप्लव द्रव में निकिल की बची हुई सान्द्रता ज्ञात करके की गयी।

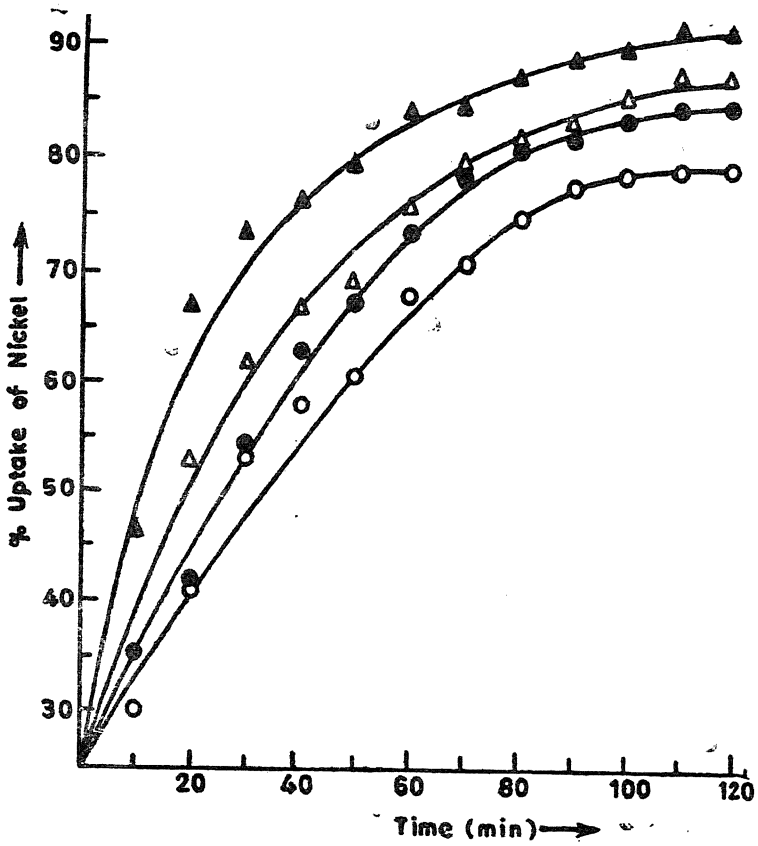
परिणाम तथा विवेचना

अधिशोषक के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि सिलिका एवं कैल्सियम आक्साइड इसके प्रमुख अवयव हैं (सारणी 1)। अन्य धात्विक आक्साइडों की उपस्थिति अत्यन्त अल्प मात्रा में है। इससे ऐसा अनुमान होता है कि अधिशोषण सिलिका अथवा कैल्सियम आक्साइड अथवा इन दोनों की सतहों पर ही होता है।

सान्द्रता एवं सम्पर्क समय का प्रभाव

विभिन्न सान्द्रताओं पर निकिल के विलगन से यह सिद्ध होता है कि विलगन की गति प्रारम्भ में तीव्र है एवं समय के साथ मन्द होती जाती है। साथ ही यह भी ज्ञात होता है कि तनु सान्द्रता के

विलयन से अधिशोष्य का विलगन अधिक होता है एवं 110 मिनट पर विलगन में संतृप्तता आ जाती है (चित्र 1)। प्रयोगों में प्रयुक्त निकिल की सान्द्रताओं में से अधिकतम विलगन 50 मिग्रा० प्रति लीटर की सान्द्रता वाले विलयन से 30° से० एवं 2.5 पी-एच पर हुआ। विलयन की आयनिक शक्ति 0.01 मोल $NaClO_4$ रखी गयी।



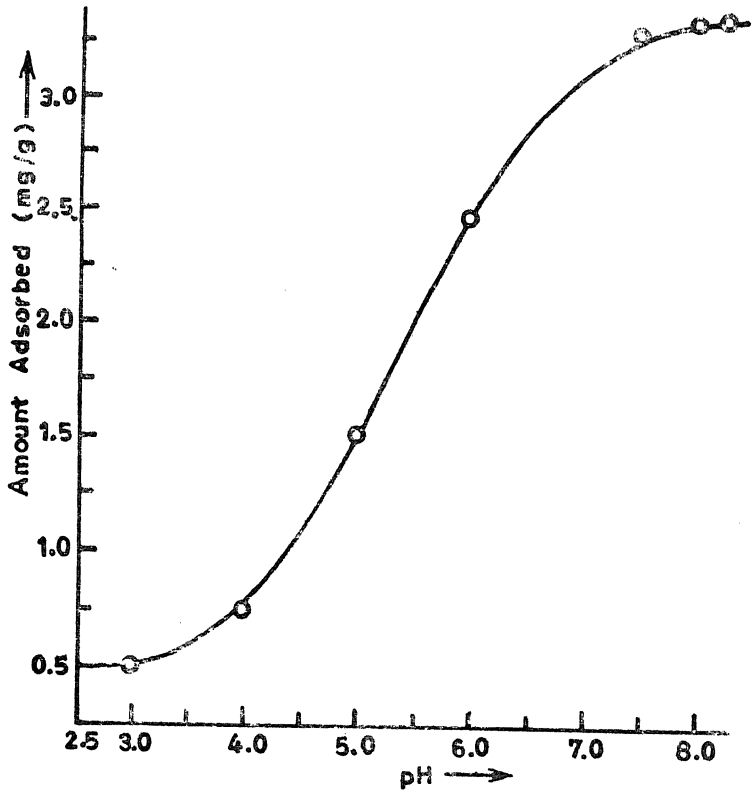
चित्र 1 : वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के अधिशोषण की प्रक्रिया पर सान्द्रता एवं संपर्क समय का प्रभाव। ताप 30 सेग्रें०, पी-एच 6.5, विलयनों की सान्द्रताएँ 125 मिग्रा० प्रति लीटर (●), 100मि० ग्रा०प्रति लीटर (●) 75 मि० ग्रा० प्रति लीटर (△), एवं 50 मि०ग्रा० प्रति लीटर (△)।

अधिशोषण गतिकी

विलगन की प्रक्रिया की गतिकी का अध्ययन लैगरग्रीन की प्रथम कोटि के निम्न समीकरण

$$\log (q_e - q) = \log q_e - \frac{k_{ad}}{2.303} \times t \qquad (1)$$

द्वारा किया गया जहाँ q_e एवं q (दोनों मि० ग्रा० प्रति ग्राम) विलयन में अधिशोष्य की क्रमशः संतृप्त अवस्था एवं किसी भी क्षण, t, पर मात्राएँ हैं। k_{ad}, अधिशोषण स्थिरांक है। अधिशोषक के वेग-स्थिरांक का औसत मान 0.148 प्रति मिनट प्राप्त हुआ[9]।



चित्र 2 : वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के अधिशोषण पर पी-एच का प्रभाव, ताप 30° से० ग्रे०, विलयन की सान्द्रता 50 मि० ग्रा० प्रति लीटर।

पी-एच का प्रभाव

वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के विलगन में पी-एच एक अत्यन्त महत्वपूर्ण कारक पाया गया एवं विलगन बढ़ते हुए पी-एच के साथ क्रमशः बढ़ता है एवं पी-एच 8 पर अधिकतम हो जाता है[9]। अधिशोषक के पृष्ठ पर निम्नलिखित क्रियाओं की संभावना है[11]

$$[(H_2O)_5NiOH]^+ + SOH \leftrightharpoons [SONi(H_2O)_5] + H_2O \quad (2)$$

$$[(H_2O)_5Ni(OH)]^{2+} + H_2O \leftrightharpoons [(H_2O)_5NiOH]^+ + H_3O \quad (3)$$

$$[(H_2O).Ni(OH_2)]^{2+} + SOH \leftrightharpoons [SONi(H_2O)_5] + H_3O \quad (4)$$

ताप का प्रभाव

इस प्रकार की क्रियाओं पर ताप के प्रभाव का अध्ययन महत्वपूर्ण है क्योंकि यह कारक अभिक्रिया का ऊष्मागतिक आचरण एवं अंतःकण परिवहन इत्यादि की क्रियाविधि की व्याख्या करने में सहायक है। निकिल के विलगन में यह देखा गया कि विलगन की मात्रा एवं ताप में प्रतिलोम सम्बन्ध है अर्थात् बढ़ते हुए ताप के साथ विलगन की मात्रा घटती है। इससे अधिशोषण क्रिया का ऊष्माक्षेपी स्वरूप भी सिद्ध होता है[12]। प्रयोगों में यह पाया गया कि अभिक्रिया का ताप 30 से 50° से० बढ़ाने पर विलगन 89.5 से 50% हो गया। अभिक्रिया के उपर्युक्त आचरण की व्याख्या निम्नलिखित समीकरणों की सहायता से ऊष्मागतिकीय आधार पर की गयी।

$$\Delta G^\circ = -RT \ln k \tag{5}$$

$$\Delta H^\circ = \ln \frac{k^{11}}{k^1} \cdot R\left(\frac{T_2 . T_1}{T_2 - T_1}\right) \tag{6}$$

$$\Delta S^\circ = \frac{\Delta H^\circ - G^\circ}{T} \tag{7}$$

जहाँ ΔG°, ΔH° एवं ΔS° क्रमशः मानक मुक्त ऊर्जा, मानक पूर्ण ऊष्मा एवं मानक एन्ट्रोपी में परिवर्तन के द्योतक हैं। k, k^1 एवं k^{11} क्रमशः T, T_1 एवं T_2 तापों पर अभिक्रिया के वेग स्थिरांक हैं। इन तीनों कारकों के मान सारणी 2 में प्रस्तुत है। मुक्त ऊर्जा के ऋणात्मक मान उपर्युक्त अभिक्रिया की संभाव्यता को सिद्ध करते हैं एवं एन्थैल्पी (ΔH°) के मान (सारणी 2) वोलस्टोनाइट पर अधिशोषण द्वारा निकिल-विलगन की क्रिया का ऊष्माक्षेपी स्वरूप दर्शाते हैं। एन्ट्रोपी के घटते हुए मान अभिक्रिया के यादृच्छिक स्वरूप में कमी के द्योतक हैं।

सारणी 1

वोलस्टोनाईट का विश्लेषण

गुण	भार के अनुसार प्रतिशत
SiO_2	48.52
Al_2O_3	0.24
CaO	48.48
Fe_2O_3	0.26
कणों का औसत व्यास	48.10^{-4} सेमी०^2
सतह क्षेत्रफल	1.18 मी०^2 प्रति ग्राम
घनत्व	2.21 ग्राम प्रतिघन सेमी०
पी-एच	2.60

सारणी 2

निकिल के विलगन में ऊष्मागतिकीय कारकों के मान

ताप (से० ग्रें०)	ΔG° (कि० कैलोरी मोल$^{-1}$)	ΔH° (कि० कैलोरी मोल$^{-1}$)	ΔS° (स्न्ट्रोपी इकाई)
30°	—0.051	25.26	83.53
40°	—1.37	16.09	55.78
50°	—1.92	8.27	25.62

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से योगेश चन्द्र शर्मा छात्रवृत्ति प्रदान करने लिए विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आभारी हैं।

निर्देश

1. मुखर्जी, ए० जी०, गलगोटिया पब्लिकेशन, नई दिल्ली, 1986.

2. वाटरास, सी० जे०, मैक्फारलेन, जे० तथा मोरेल, एफ० एम० एम०, **कैन० ज० फिश० एक्वे० सा०** 1985, **42**, 724

3. सेयर, आई० एम०, **ज० अमे० वाटरवर्क्स एसो०**, 1988, **78**, 53-58

4. किम, जे० आई० तथा जूनियर, जे० जैड०, **प्रोग० वाटर० टैक**, 1977, **19**, 143-55

5. कुत्सल, वाई० एस० टी०, **बायोटैक्नोलॉजी लेटर्स** 1989, 11, 141-145.

6. एलैन, एस० जे०, मैके, जी० तथा खदेर, के० वाई० एच०, **एन० पाल्यूट०**, 1988, **56**, 39-53.

7. तिवारी, पी० एच०, कैम्पबैल, ए० आर० तथा ली० डब्ल्यू०, **कैन० ज० केमि०** 1972, **50** 1642-1657.

8. शर्मा, वाई० सी०, प्रसाद, जी० तथा रूपैनवार, डी० सी०, **आई०ए०डब्ल्यू० पी०सी० टैक्नीकल एनुअल**, 1988, 181-185.

9. शर्मा, वाई० सी०, प्रसाद, जी० तथा रूपैनवार, डी० सी० वाटर, एयर एन्ड सायल पाल्यूट (स्वीकृत)।

10. इण्डियन स्टै० मैथड्स आफ कैमि० एना० आफ फायर क्ले एण्ड सिलिका रैफ्रेक्टरी मैटेरियल्स 1960, आई० एस० : 1527.

11. स्टम, डब्ल्यू०, एक्वैटिक सरफेस कैमिस्ट्री, विले इण्टरसाइंस पब्लिकेशन, न्यूयार्क, 1987, पृष्ठ 99.

12. गुप्ता, जी० एस०, प्रसाद जी० तथा सिंह, वी०एन०, **जर्न० एन० सा० एण्ड** हैल्थ 1988, **23 (3),** 205-217.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

लारिसेला फलनों वाले कतिपय द्विपार्श्वजनक फलन

एच० सी० अग्रवाल तथा ए० के० अग्रवाल
गणित विभाग, बुन्देलखंड स्नातकोत्तर विद्यालय, झाँसी (उ० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 27, 1988]

सारांश

इस टिप्पणी में लेखकों ने कतिपय जनक फलन व्युत्पन्न किये हैं जिनमें लागेर तथा जैकोबी बहुपदियों के अतिरिक्त लारिसेला हाइपरज्यामितीय फलन भी निहित हैं। कतिपय विशिष्ट दशाओं पर भी विचार किया गया है।

Abstract

Some bilateral generating functions involving Lauricella functions. *By* H. C. Agrawal and A. K. Agrawal, Department of Mathematics, Bundelkhand Postgraduate College, Jhansi, U. P.

In this note the authors derive certain generating functions, which besides involving Leguerre and Jacobi polynomials also involve Lauricella hypergeometric functions. Towards the end of the paper some special cases are also discussed.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित द्विपार्श्व जनक फलनों को व्युत्पन्न करना चाहेंगे :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x) \Psi_2^{(r)} [\lambda+n;a_1,\ldots,a_r;x_1,\ldots x_r]$$

$$=(1-t)^{\lambda}\Psi_2^{(r+1)}[\lambda:a_1,\ldots,a_r,1+\alpha;x_1/(1-t),\ldots,x_r/(1-t), -xt/(1-t)], \qquad (1.1)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\, \phi_2^{(r)}[a_1,\ldots,a_r;1+\alpha+n:x_1,\ldots,x_r]$$

$$=(1-t)^{-\lambda}\phi_2^{(r+1)}[a_1,\ldots,a_r,\lambda;1+\alpha:x_1,\ldots,x_r,\ -xt/(1-t)], \tag{1.2}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\, F_A^{(r)}[\lambda+n;a_1,\ldots,a_r;b_1,\ldots,br;x_1,\ldots,x_r]$$

$$=w^{-\lambda}F_A^{(r+1)}[\lambda:a_1,\ldots,a_r,\ -\beta;\ b_1,\ldots,b_r,\ -\alpha-\beta;x_1/w,\ldots x_r/w,\ t/w], \tag{1.3}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\, F_C^{(r)}\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+n),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+n+1):a_1,\ldots,ar;\ x_1^2,\ldots,x_r^2\right]$$

$$=\mu^{-\lambda}F_A^{(r+1)}\lambda:a_1-\tfrac{1}{2},\ldots,a_r+\tfrac{1}{2},\ -\beta;2a_1-1,\ldots,2a_r-1,\ -\alpha-\beta;\ 2x_1|\mu,\ldots,2x_r/\mu,t/\mu], \tag{1.4}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{m+n}{n} t^n P_{m+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(x\ F_A^{(r)}[-n:a_1;\ldots a_r:b_1;\ldots,b_r:x_1\ldots,x_r]$$

$$=\left(\frac{1+x}{2}\right)^m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\alpha}\rho^{\alpha+\beta+m}\ \frac{(1+\alpha+\beta+m)_m}{m!}\ F_A^{(r+1)}[-\alpha-\beta-m:a_1,\ldots,a_r,$$

$$-\alpha-m;b_1,\ldots,b_r,-\alpha-\beta-2m;x_1t(x-1)/2\rho,\ldots,x_rt(x-1)/2\rho,2/\rho(1+x)]; \tag{1.5}$$

जहाँ

$w=1+\frac{1}{2}(1+x)\ t,\ \mu=1+x_1+\ldots x_r+\frac{1}{2}(1+x)t$

तथा

$\rho=1+\frac{1}{2}(x-1)\ t.$

$\Psi_2^{(r)}, \phi_2^{(r)}, F_A^{(r}, F_C^{(r)}$ तथा $F_D^{(r)}$ फलनों की परिभाषा के लिए निर्देश[2] को देखें। $L_K^{L^{(\alpha)}}(x)$ तथा $P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$ क्रमशः लागेर जैकोबी बहुपद हैं[6]।

अपने विश्लेषण में हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी[6,4,2,3]

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)=(1-t)^{-\lambda}\ {}_1F_1[\lambda:1+\alpha:-xt/1-t)], \tag{1.6}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)=w^{-\lambda}{}_2F_1[\lambda, -\beta;-\alpha-\beta;t/w], \tag{1.7}$$

$$F_0^{(r)}\left[a/2, (1+a)/2; a_1,...,a_r; x_1^2,...,x_r^2\right]=(1+x_1+...+x_r)^{-a}$$

$$\times F_A^{(r)}\left[a:a_1-\tfrac{1}{2},...,a_r-\tfrac{1}{2};2a_1-1,..., 2a_r-1; \frac{2x_1}{1+x_1+...x_r},...,\frac{2x_r}{1+x_1+...+x_r}\right], \tag{1.8}$$

तथा

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{m+n}{m} t^n P_{m+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)=\frac{(1+\alpha+\beta+m)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\alpha}\rho^{\alpha+\beta+m}$$

$$\times {}_2F_1[-\alpha-\beta-m, -\alpha-m;-\alpha-\beta-2m;2/\rho(x+1)]. \tag{1.9}$$

हम केवल (1.1) की उपत्ति देंगे, अन्यों को इसी तरह सिद्ध किया जा सकता है।

2. (1.1) की उपपत्ति

निम्नलिखित पर विचार करें :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\, \Psi_2^{(r)}[\lambda+n:a_1,...,a_r;x_1,...,x_r]$$

$$=\sum_{m_1,\cdots,m_r\geqslant 0}\frac{(\lambda)_{m_1+\cdots+m_r}}{(a_1)_{m_1}\cdots(a_r)_{m_r}}\frac{x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r}}{m_1!...m_r!}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\lambda+m_1+...+m_r)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)$$

अब (1.6) का सम्प्रयोग करने पर

$$=(1-t)^{-\lambda}\sum_{m_1,\cdots m_r\geqslant 0}\frac{(\lambda)_{m_1+\cdots+m_r}}{(a)_{m_1}\cdots(a_r)_{m_r}}\frac{\{x_1/(1-t)\}^{m_1}...\{x_r/(1-t)\}^{m_r}}{m_1!...m_r!}$$

$$\times {}_1F_1[\lambda+m_1+...+m_r;1+\alpha; -xt/(1-t)],$$

मिलता है जो थोड़े सरलीकरण के बाद (1.1) प्रदान करता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(I) (1.1) में माना $\lambda=a$, $1+\alpha=c'$ $t=x$, $x=y$ तथा $x_1=x_2=...x_r=0$, तो हमें

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n L_n^{(c'-1)}(y)}{(c')_n}x^n=(1-x)^{-a}{}_1F_1[a;c';xy/(x-1)]. \tag{3.1}$$

प्राप्त होता है जो देशपाण्डे का परिणाम है[1] ।

आगे (1.1) में $\lambda=1+\beta-n$, $t=z$, $r=1$, $a_1=1+\beta-n$ तथा $x_1=-y$ रखने पर

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{(1+\alpha)_n}z^n\,L_n^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\beta-n)}(y)=\exp.(y)\,(1-z)^{-1-\beta+n}$$

$$\times\,\Psi_2[1+\beta-n:1+\beta-n,\ 1+\alpha;\ -y/(1-z),\ -xz/(1-z)]. \tag{3.2}$$

रंगराजन ने [7, (13)] भी सिद्ध किया है कि

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{(1+\alpha)_n}z^n\,L_n^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\beta-n)}(y)=\exp.(-yz)\,(1+z)^{\beta}$$

$$\times\,\phi_3[-\beta;\ 1+\alpha:xz/(1+z),\ xyz], \tag{3.3}$$

जहाँ

$$\phi_3[\beta;\gamma:x,y]=\sum_{m,n\geq 0}\frac{(\beta)_m x^m y^n}{(\gamma)_{m+n}\,m!\,n!}\ .$$

अतः (3.2) तथा (3.3) से Ψ_2 तथा ϕ_3 के मध्य निम्नलिखित रोचक रूपान्तर प्राप्त होता है

$$\Psi_2[1+\beta-n:1+\beta-n,\ 1+\alpha;\ -y/(1-z),\ -xz/(1-z)]$$

$$=\exp.(-y(z+1))\,(1+z)^{\beta}\,(1-z)^{1+\beta-n}\,\phi_3[-\beta;\ 1+\alpha:xz/(1+z),\ xyz]. \tag{3.4}$$

इसके बाद यदि हम (1.1) में $r=1$ लें तथा कुमर का रूपान्तर[6] प्रयोग करें तो हमें एक अन्य ज्ञात परिणाम प्राप्त होगा जो मनोचा [5, (14)] का है । इसे ही बाद में श्रीवास्तव तथा सिंघल ने भी [8, (34)] व्युत्पन्न किया है ।

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(m+n!)}{(\lambda+1)_n}\,L_{m+n}^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\lambda)}(y)\,t^n=\exp.(x)\,(1+\alpha)_m\,(1-t)^{-1-\alpha-m}$$

$$\times\,\Psi^{(2)}[1+\alpha+m:1+\alpha,\ 1+\lambda;\ x/(t-1),\ yt/(t-1)]. \tag{3.5}$$

(II) (1.3) में $\alpha=b-c$, $\beta=-b$, $\lambda=a$, $x=y$, $t=-x$ तथा $x_1=\ldots=x_r=0$ लें जिससे

$$\sum_{n\geq 6}\frac{(a)_n\,(-x)^n}{(c)_n}\,P_n^{(b-c-n,\ b-n)}(y)$$

$$=(1-x)^{-a}\,F_2[a:b,b';c,b';-x/(1-x),\ -x(1-y)/2(1-x)], \tag{3.6}$$

प्राप्त हो जो देशपाण्डे के शोधपत्र[1] का अन्य परिणाम है ।

यदि हम (1.5)में $a=\gamma$, $a_2=\gamma'$, $b_1=\delta$, $b_2=\delta'$, $x_1=y$, $x_2=z$ तथा $x_3=\ldots=x_r=0$ लिखें तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है जो मनोचा[4] का परिणाम है ।

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n}\, t^n\, P_n^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\, F_2[\lambda+n:\gamma,,\gamma';\delta,\delta';y,z]=[1-\tfrac{1}{2}t(1-x)]^{-\lambda}$$

$$\times\, F_3[\lambda:\gamma,\ \gamma',\ -\alpha;\ \delta,\ \delta',\ -\alpha-\beta;y/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t),\ z/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t,\ -t/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t)]. \tag{3.7}$$

(III) यदि हम (1.5) में $\alpha=\lambda$, $\beta=\mu$, $x=y$, $x_1=x$, $x_2=2$ तथा $x_3=\ldots=x_r=0$ लिखें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(m+n)\,!}{(-\alpha-\beta)_n}\, t^n\, P^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\, P_{m+n}^{(\lambda-n,\ \mu-n)}(y)=(1+\lambda+\mu+m)_m\left[\,1+\frac{t}{4}(y-1)\,\right]^{\lambda+\mu+m}$$

$$\times\left(\frac{1+y}{2}\right)^m\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{-\lambda} F_A[-\lambda-\mu-m:-\alpha,a_2,-\lambda-m;-\alpha-\beta,\ a_2,-\lambda-\mu-2m;$$

$$xt(y-1)/4\rho,\ t(y-1)/2\rho,\ 2/\rho(1+y)]. \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है ।

(3.8) को निम्नलिखित परिणाम का विस्तार माना जा सकता है जिसे मनोचा तथा शर्मा ने[3] स्थापित किया है ($m=0$ रखें तथा प्राचलों को संमजित कर लें ।)

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(-\lambda-\mu)_n}\, t^n\, P_n^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\, P_n^{(\lambda-n,\mu-n)}(y)=\left[\,1-\frac{1}{4}\{(x+1)\,(y+1)\}\,t\,\right]^{\alpha}$$

$$\times\left[\,1-\frac{1}{4}\{(x-1)\,(y+1)\}\,t\,\right]^{\beta} F_1[-\mu;\ -\alpha,\ -\beta;\ -\lambda-\mu;\ 2(x+1)t/\{(x+1)$$

$$(y+1)\,t-4\},\ 1(x-1)t/\{(x-1)\,(y+1)t-4\}]. \tag{3.9}$$

अन्त में (1.5) में $x=1$ तथा $x=0$ रखने से निम्नलिखित रोचक सूत्र प्राप्त होता है—

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(1+\alpha-n)_n}{n!}\, t^n\, F_A^{(r)}[-r:a_1\ldots,a_r;b_1,\ldots b_r;x_1\ldots,x_r]$$

$$=((x-1)/(x+1))^{-\alpha}\,[1+\tfrac{1}{2}\,(x-1)t]^{\alpha+\beta}\, F_A^{(r+1)}[-\alpha-\beta:a_1,\ldots a_r,\ -\alpha;\ b_1,\ldots,b_r,$$

$$-\alpha-\beta;x_1t(x-1)/2\rho,\ldots,x_rt(x-1)/2\rho,\ 2/\rho(1+x)]. \tag{3.10}$$

निर्देश

1. देशपाण्डेय, वी० एल० तथा भिसे, वी० एम०, Math. Bechnk, 1970, 7(**22**), 169-172.
2. एक्षटन, एच०; 'Multiple Hygergeometric Functions and Applications', Ellis Harwood Limited England (London), 1976.
3. मनोचा, एच० एल० तथा शर्मा, बी० एल०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1966, **62**, 459-462.
4. मनोचा, एच० एल०, वही, 1967, **63**; 457-459.
5. वही, Pub. Inst. Math. Beograd, 1969, **9**(**23**), 225-234.
6. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, Chelsea Pub. Com. New York, 1960.
7. रंगराजन, एस० के०; Proc. Ind. Acad. Sci., 1964, **60**, 153-158.
8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंघल, जे० पी०, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1972, **20**, 355-363.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

A-फलनों के समाकल

राजपाल सिंह, मुकेश सिंहल तथा योगेन्द्र कुमार शर्मा
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 6, 1988]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में चार समाकलों का मान निकाला गया है जिन्हें प्रमेयों के रूप में दिया गया है। समाकल्य में A-फलन होने से ये समाकल अत्यन्त सामान्य तथा ज्ञात फलनों को प्राप्त करने के लिए मूलभूत हैं। रोचक विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

On integrals of A-functions. *By* Rajpal Singh, Mukesh Singhal and Yogendra Kumar Sharma, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have evaluated four integrals given in the form of theorems. These integrals by virtue of the A-function in the integrand, form the basis of obtaining most general and known integrals. Interesting special cases are also recorded.

1. प्रस्तावना

गौतम तथा गोयल ने[3] एन नवीन सामान्य आबीजीय फलन की परिभाषा निम्नलिखित रूप में दी है

$$A_{p,q}^{m,n}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)x^s\,ds \tag{1.1}$$

जहाँ

(i) $$f(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+s\alpha_j)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-b_j-s\beta_j)}{\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-a_j-s\alpha_j)\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(b_j+s\beta_j)} \tag{1.2}$$

(ii) m, n, p तथा q अनृण संख्याएँ हैं जिसमें $m \leqslant p,\ n \leqslant q.$

(iii) $x \neq 0$ तथा प्राचल $a_j,\ \alpha_j,\ b_k$ एवं $\beta_k (j=1$ से p तथा $k=1$ से $q)$ सभी संमिश्र है।

(1.1) के दाएँ पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

$$\text{(I)}\quad x \neq 0,\ k=0,\ h>0,\ |arg\ (ux)| < \frac{\pi h}{2} \tag{1.3}$$

$$\text{(II)}\quad x>0,\ k=0=h,\ (v-\sigma w)<-1 \tag{1.4}$$

जहाँ

$$k=Im\Big(\sum_1^p \alpha_j - \sum_1^q \beta_j\Big)$$

$$h=Re\ \Big(\sum_1^m \alpha_j - \sum_{m+1}^p \alpha_j + \sum_1^n \beta_j - \sum_{n+1}^q \beta_j\Big)$$

$$u=\prod_1^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_1^q \beta_j^{-\beta_j}$$

$$v=Re\ \Big(\sum_1^p a_j - \sum_1^q b_j\Big) - 1/2(p-q)$$

$$w=Re\ \Big(\sum_1^q \beta_j - \sum_1^p \alpha_j\Big)$$

तथा $\quad s=\sigma+it$ पथ I पर है जब $|t| \to \infty.$

अपरंच, श्रेणी के रूप में यह A-फलन निम्नवत् है

$$A_{p,q}^{m,n}\left[x \begin{matrix}((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q))\end{matrix}\right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j+\alpha_j w) \prod_{\substack{j=1 \\ \neq k}}^{n} \Gamma(1-b_j-\beta_j w)\ (-)^h\ x^w}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1-a_j-\alpha_j w) \prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(b_j+\beta_j w)\ h!\ (\beta_k)} \tag{1.5}$$

जहाँ

$$w=\Big(\frac{1-b_k+h}{\beta_k}\Big)$$

2. ज्ञात परिणाम

अनुभाग 3 में आये प्रमेयों की उपपत्तियों में निम्नलिखित ज्ञात परिणामों का उपयोग किया जावेगा।

(i) $\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d-1}[ax+b(1-x)]^{-s-d}\, e^{-z/[ax+b(1-x)]}$

$$ {}_2F_1\left[\alpha, \beta;\ c;\ \frac{dx}{ax+b(1-x)}\right]dx $$

$$ = e^{-z}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(c+d-\alpha-\beta)}{(a)^c(b)^d\Gamma(c+d-\alpha)\Gamma(c+d-\beta)}\ {}_2F_2[d,\ c+d-\alpha-\beta;c+d-\alpha,\ c+d-\beta;\ z] \quad (2.1) $$

जहाँ

$Re(c)>0$, $Re(d)>0$, $Re(c+d-\alpha-\beta)>0$, a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(ii) $$ \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-1}[ax+b(1-x)]^{-2c}\ {}_2F_1\left[\alpha, \beta;\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx $$

$$ = \frac{\pi\Gamma(c)\Gamma(1/2+\alpha/2+\beta/2)\Gamma(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)}{2^{2c-1}(ab)^c\ \Gamma(1/2+\alpha/2)\Gamma(1/2+\beta/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+c)\Gamma(1/2-\beta/2+c)} \quad (2.2) $$

जहाँ

$Re(c)>0$, $Re(1/2+\alpha/2+\beta/2)>0$, $Re(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)>0$, a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं एवं $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(iii) $$ \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-d}[ax+b(1-x)]^{-2c+d-1}{}_2F_1\left[\alpha, 1-\alpha;\ d;\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx $$

$$ = \frac{\pi(2)^{1-2c}\ \Gamma(c)\ \Gamma(d)\ \Gamma(c-d+1)}{(a)^c\ (b)^{c-d+1}\ \Gamma(\alpha/2+d/2)\ \Gamma(c+\alpha/2-d/2+1/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+d/2)\Gamma(1+c-\alpha/2-d/2)} \quad (2.3) $$

जहाँ

$Re(c)>0$, $(Re(c-d+1)>0$, $Re(d)>0$, a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(iv) $$ \int_0^\infty x^{s-1}\ e^{x/2}\ W_{k,u}(x)dx = \frac{\Gamma(u+s+1/2)\ \Gamma(1/2-u+s)\Gamma(-k-s)}{\Gamma(u-k+1/2)\ \Gamma(1/2-u-k)} \quad (2.4) $$

जहाँ

$$ |Re\ u|-1/2<Re(s)<-Re\ k. $$

3. दो A-फलनों के गुणनफल वाले समाकल

प्रमेय I

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d-1}[ax+b(1-x)]^{-c-d}\ {}_2F_1\left[\alpha,\beta;c:\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\exp\left[\frac{-zax}{ax+b(1-x)}\right]\cdot$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[y\left(\frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)}\right)^{v}\Big|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right]\ A_{P,Q}^{M,N}\left[y_1\left(\frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)}\right)^{\lambda}\Big|\begin{matrix}((A_p,E_p))\\((B_Q,F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{e^{-z}\Gamma(c)}{(a)^c(b)^d}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j=1\\\neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)\,(-)^h y_1^{w}\,z^r}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)\,h!\,r!\,(F_k)}$$

$$A_{p+2,\,q+2}^{m+2,n}\left[y\ \Big|\ \begin{matrix}(d+\lambda w+r,v),\,(c+d+r+\lambda w-\alpha-\beta,v)\,((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q)),\,(c+d+r+\lambda w-\alpha,v)\,(c+d+r+\lambda w-\beta,v)\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ v,\ \lambda>0,\ Re(c)>0,\ Re(d)>0,$$

$Re(c+d-\alpha-\beta)>0, a$ तथा b अशून्य पूर्णांक हैं और $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (3.1) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाला A-फलन वैश्लेषिक रीति से प्रतिबन्धों की तुष्टि करता है।

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिए बाएँ पक्ष में (1.1) तथा (1.5) परिणामों का व्यवहार करने तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर निम्नलिखित की प्राप्ति होती है।

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j-1\\\neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)\,(-)^h(y_1b^{\lambda})^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_f+F_jw)\,h!\,(F_j)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\phi(s)\,(yb^v)^s\cdot$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d+sv+\lambda w-1}[ax+b(1-x)]^{-c-d-sv-\lambda w}\ {}_2F_1\left[\alpha,\beta;c;\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\cdot$$

$$\exp\left[\frac{-zax}{ax+b(1-x)}\right]dx\,ds.$$

अब (2.1) के सम्प्रयोग से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करते हैं, ${}_2F_2$ के लिए श्रेणी लिखते हैं, (1.1) की सहायता से परिणाम की विवेचना करते हैं तो तुरन्त ही दायाँ पक्ष निकलता है।

प्रमेय II

$$\int_0^1 x^{c-1}\,(1-x)^{c-1}\,[ax+b(1-x)]^{-2c}\;{}_2F_1\left[\alpha,\ \beta;\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\cdot$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[y\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^{v}\middle|\begin{matrix}((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right]\ A_{P,Q}^{M,N}\left[z\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^{u}\middle|\begin{matrix}((A_P,\ E_P))\\((B_Q,\ F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2\pi\Gamma(1/2+\alpha/2+\beta/2)}{(4ab)^c\,\Gamma(1/2+\alpha)\Gamma(1/2+\beta/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\ \prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^n\,(4^vz)^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\ \prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)h!\ F_k}$$

$$A_{p+2,q+2}^{m+2,n}\left[\ 4^vy\ \middle|\begin{matrix}(c+4w,\ v);\ (1/2-\alpha/2-\beta/2+c+4w,\ v);\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_p,\ \beta_q));\ (1/2-\alpha/2+c+uw,\ v);\ (1/2-\beta/2+c+uw,v)\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ

$$w\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ u>0,\ v>0,\ Re(c)>0,\ Re(1/2+\alpha/2+\beta/2)>0,$$

$Re(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)>0$, a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा गुणांक $[ax+b(1-x)]\neq 0$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (3.2) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाला A-फलन वैश्लेषिक रीति से प्रतिबन्धों की तुष्टि करता है।

प्रमेय III

$$\int_0^1 x^{c-1}\,(1-x)^{c-d}\,[ax+b(1-x)]^{-2c+d-1}\;{}_2F_1\left[\alpha,\ 1-\alpha;\ d;\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\cdot$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^{v}\middle|\begin{matrix}((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right]\ A_{P,Q}^{M,N}\left[z\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^{v}\middle|\begin{matrix}((A_P,\ E_P))\\((B_Q,\ F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2\pi\Gamma(d)}{(4ab)^c(b)^{1-d}\Gamma(\alpha/2+d/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+d/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\cdot$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_j)\,(-)^h}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\ \prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)h!(F_k)}\left(\frac{z}{4u}\right)^w A_{p+2,q+2}^{m+2,n}$$

$$\left[\frac{y}{4^v}\left|\begin{matrix}(c+uw,\ v);(c+uw-d+1,\ v);\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q));\ (1/2+c+uw+a/2-d/2,v);(1+c+uw-a/2-d/2,\ v)\end{matrix}\right.\right] \tag{3.3}$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ u>0,\ v>0,\ Re(c)>0,\ Re(c-d+1)>0,\ Re(d)>0,$$

a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (3.3) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाले A-फलन से प्रतिबन्धों की तुष्टि वैश्लेषिक रीति से होती है।

प्रमेय IV

$$\int_0^\infty x^{s-1}\, e^{x/2}\, W_{r,u}(x)\, A_{p,q}^{m,n}\left[yx^\lambda\left|\begin{matrix}((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right.\right] A_{P,Q}^{M,N}\left[zx^v\left|\begin{matrix}((A_P,\ E_P))\\((B_Q,\ F_Q))\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(u-r+1/2)\Gamma(1/2-u-r)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{j=1}^{N}{}_{\neq k}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^h z^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)\,h!F_k}$$

$$A_{p+2,\ q+1}^{m+2,\ n+1}\left[y\left|\begin{matrix}(u+s+vw+1/2,\ \lambda);\ (1/2-u+s+vw,\ \lambda),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\(1+r+s+vw,\ \lambda);\ ((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right.\right] \tag{3.4}$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ \lambda>0,\ v>0,\ |Re\ u|-1/2<Re(s)<-Re(r)$$

तथा (3.4) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाले A-फलन से प्रतिबन्ध की तुष्टि हो जाती है।

उपपत्ति

प्रमेय I की ही तरह प्रमेय II, III तथा IV की उपपत्ति विकसित की जा सकती है। हाँ, (3.2) (3.3) तथा (3.4) का दायाँ पक्ष प्राप्त करने के लिए (2.1) के स्थान पर क्रमशः (2.2), (2.3) तथा (2.4) का प्रयोग किया जावेगा।

विशिष्ट दशाएँ

प्रमेय I की विशिष्ट दशाएँ प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित विधि अपनाई गई है जिसका प्रयोग अन्य प्रमेयों के साथ किया जा सकता है—

(i) यदि a_p, β_q, E_P तथा F_P सभी वास्तविक धनात्मक हैं, पथ A-फलन फाक्स के H-फलन में[2] निम्नलिखित प्रकार से समानीत हो जाता है।

$$A_{p,q}^{n,m}\left[x \left| \begin{matrix}((1-a_p, \alpha_p))\\((1-b_q, \beta_q))\end{matrix}\right.\right] = H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix}((a_p, \alpha_p))\\((b_q, \beta_q))\end{matrix}\right.\right]$$

परिणाम हमें दो H-फलन के गुणनफल के रूप में प्राप्त होता है।

(ii) यदि उपर्युक्त प्रतिस्थापनों के अतिरिक्त हम α_p, β_q, E_P, F_P, $\nu=1$, रखें तो यह G-फलन के परिणाम में समानीत हो जाता है।

(iii) एर्डेल्यी की पुस्तक[1] में दिये गये G-फलन की विविध विशिष्ट दशाओं का उपयोग करते हुए हम अनेक सरलतर विशिष्ट फलनों वाले तमाम समाकल प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० Higher Transcendental Functions. Vol. I, Mc Graw-Hill 1953.
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 393-429.
3. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, Ind. J. Pure and Appl. Math. 1981, **12** 1094-1105.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 2, 1990

प्रत्यावर्ती धारा नीरव-विद्युत् विसर्जन में काँच पृष्ठ के समीप वैद्युत द्विस्तर का निर्माण

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त–दिसम्बर 1, 1989]

सारांश

विगैसित तथा अविगैसित निकायों में पारद वाष्प तथा निऑन के स्लीव उत्तेजन द्वारा जोशी प्रभाव $\pm\%\triangle i$ पर, 25° से 250°C तक ताप के प्रभाव का अध्ययन किया गया। अविगैसित स्लीव नलियों में, $-\%\triangle i$ 75°C तक बढ़ता हुआ पाया गया। विगैसित नलियों में $+\%\triangle i$ ताप के साथ क्रमशः बढ़ता हुआ पाया गया। 150°C से ऊपर $-\triangle i$ प्रेक्षित नहीं हुआ। इनकी व्याख्या प्रस्तावित वैद्युत द्विस्तर सिद्धान्त के आधार पर की गई है।

ABSTRACT

Formation of electrical double layer near glass surface in a. c. silent electric discharge. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Influence of temperature from 25°C to 250°C on the Joshi effect $\pm\%\triangle i$ in mercury vapour and neon with degassed systems under sleeve excitation has been studied. In non-degassed sleeve tubes, $-\%\triangle i$ has been found to increase upto 75°C and decrease afterwards. In degassed sleeve tubes, $+\%\triangle i$ has been observed to increase regularly with temperature. No $-\triangle i$ has been observed above 150°C. These have been explained on the basis of the proposed theory of the 'electrical double layer.'

जोशी प्रभाव $\pm\triangle i$ के लिए भौतिक सिद्धान्त[1] में जोशी ने विसर्जन के दौरान, आयनों, इलेक्ट्रॉनों, तथा उत्तेजित कणों से बने एक अधिशोषण-सदृश सीमांत या इलेक्ट्रोड-तल की परिकल्पना की

है। निकाय के ताप की वृद्धि इलेक्ट्रोड-तल को विकृत कर सकती है। अतः अविगैसित निकायों में पारद वाष्प तथा निऑन के नियत द्रव्यमान की अवस्थाओं में अन्वेषण किया गया।

प्रयोगात्मक

पुनरासुत पारद को रखने के लिए बनी पार्श्व बल्बयुक्त, सिग्कोल S75 काँच की 15 सेमी० लम्बी नली (स्लीव-अंतराल=60 मिमी) को काँच समुदाय के साथ जोड़ दिया गया। द्विमंच लेबोल्ड पंप से इसका निर्वातन किया गया। वैद्युत तापित कक्ष में नली को परिबद्ध करके, 25° से 250°C तक के विविध तापों पर इसके $(V-i)_{D,\,L}$ अभिलक्षणों का आलेखन किया गया। तत्पश्चात्, विसर्जन नली का 400°C पर विगैसन करके, पारद को आसवन द्वारा उड़ा दिया गया। विगैसित नली के साथ ताप के अध्ययन को दोहराया गया।

स्पेक्ट्रम-शुद्ध निऑन को द्रव वायु ट्रैप में गुज़ार कर पूर्व प्रकाशित विधि[2] द्वारा विगैसित नली में प्रविष्ट किया गया। pNe=3.7 मिली, 25°C पर इसको मुंहबन्द करके, ताप के अध्ययन को उपर्युक्त स्लीव-अंतराल पर दोहराया गया।

परिणाम तथा विवेचना

अविगैसित दशा में, 75°C तक $+\%\Delta i$ तथा $-\%\Delta i$ दोनों बढ़ते हैं; तत्पश्चात्, केवल $+\%\Delta i$ बढ़ता है, जबकि पारद वाष्प तथा निऑनयुक्त विगैसित निकायों में $+\%\Delta i$ ताप के साथ क्रमशः बढ़ता जाता है। सभी दशाओं में, 150°C पर तथा इससे ऊपर केवल $+\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ।

निऑन सदृश इलेक्ट्रॉन-युक्त गैस में जोशी प्रभाव के प्रेक्षण के लिए यह प्रस्ताव है कि प्रत्यावर्ती धारा विसर्जन में जिस समय तल क्षणिक ऐनोड का कार्य करता है, उस समय उस पर इलेक्ट्रॉनों का निक्षेपण हो जाता है। जब तल कैथोड बन जाता है तब, ये इलेक्ट्रॉन श्लथ बध हो जाते हैं और बाह्य विकिरणों द्वारा सुगमतापूर्वक मुक्त हो जाते हैं। Δi के लिए जोशी सिद्धान्त [1] में परिकल्पित अधि-शोषण-सदृश सीमांत-तल के साथ यह अभिनिर्धारणीय है। जब इलेक्ट्रॉन विक्षेपित होते हैं और विकिरण से मुक्त होते हैं या उनका उदासीनीकरण होता है तब, वे धनात्मक आयन जिनका दुर्लभ गैस में सांद्रण पर्याप्त होता है, कैथोड की ओर गति करते हुए होते हैं। विभव के चिह्न में जल्दी-जल्दी परिवर्तन के कारण, तल पर एक द्विस्तर इस प्रकार बन जाता है कि उसके एक ओर धनात्मक आयन होते हैं। परावैद्युत से मित-स्थायियों तथा अन्य साधनों द्वारा मुक्त वे इलेक्ट्रान जिनके वेग मेक्सवेल रीति से वितरित होते हैं, उन्हें द्विस्तर के कर्षण को पार करना होता है। जो इस कर्षण को पार कर जाते हैं वे धारा प्रवाहन में सहयोग देते हैं। यह द्विस्तर कांच भित्तियों के श्रेणीक्रम में एक और धारिता का समावेश कर देता है और परिणामी को बदल देता है, जैसा कि प्रेक्षित धारा परिवर्तनों[3] से स्पष्ट होता है।

वर्द्धित प्रदीपन की तीव्रता के साथ, पृष्ठ से मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या तथा उनके वे भाग जिनकी गतियाँ द्विस्तर को पार करने में समर्थ हैं, बढ़ जाती हैं और फलस्वरूप $\pm\triangle i$ बढ़ जाता है, जिसकी संतृप्ति मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संतृप्ति होती है।

द्विस्तर उस विभव परिसर में बनता है जबकि $+\triangle i$ घटना आरंभ होती है, जिसका प्रभाव $-\triangle i$ को बढ़ाने का होता है। अनुप्रयुक्त विभव की वृद्धि के साथ द्विस्तर की मोटाई घट जाती है, जिसका कर्षण इलेक्ट्रॉनों पर बढ़ जाता है, फलतः $-\triangle i$ बढ़ जाता है।

उस विभव परिसर में जहाँ $-\triangle i$ घटता है, द्विस्तर का निपात हो जाता है, किन्तु, तत्क्षण पुनः बढ़ जाता है और दिष्ट धारा विभवों के साथ इस नवीनीकरण की बढ़ती हुई आवृत्ति इतनी अचर होती है कि $\triangle i$ का परिमाण कम हो जाता है और $\pm\triangle i$ के स्थायीकरण के लिए कालप्रभावन का अधिक समय लगता है।

$+\triangle i$ पर ताप का प्रभाव[4] होता है : (क) वर्द्धित इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के लिए अधिशोषण-तल का कार्य फलन घटाना ; (ख) विशोषण ; (ग) अंतराकाशी आवेश का क्षीणन तथा (घ) गैस माध्यम के पार विभव Vg को बढ़ाना। ताप वृद्धि के साथ काँच भित्तियों की धारिता बढ़ने[5] के कारण, (क) तथा (ख) कारकों की तुलना में मोहन्ती[4] का (घ) पर बल देना प्रसंभाव्य प्रतीत नहीं होता। (ग) को प्रभावी कारक मानना अधिक उपयुक्त प्रतीत होता है, जिसके परिणामस्वरूप $-\triangle i$ में ह्रास अतः इसके विपरीत अंग $+\triangle i$ में वृद्धि होती है। नीऑन में $\pm\triangle i$ के लिए उपर्युक्त प्रस्तावित द्विस्तर सिद्धान्त के आधार पर, ताप में वृद्धि के साथ द्विस्तर के दो तलों के मध्य की दूरी इतनी कम हो जाती है कि अंततोगत्वा यह एक तल के रूप में व्यवहार करने लगता है। पृष्ठ से निकली गैसों के साथ पृष्ठ पर संचित धनात्मक आयनों के विलय से यह सम्पन्न होता है। इस द्विस्तर की अनुपस्थिति इलेक्ट्रान को संबंधित इलेक्ट्रोड पर पहुँचने की बाधा को घटा देता है अतः $+\triangle i$ बढ़ जाता है। संपूर्ण विलय केवल उस ताप पर सम्पन्न होता है, जबकि विशोषण पर्याप्त होता है—जैसा कि 150°C पर प्रेक्षित हुआ। जब विशोषण तीव्रगामी होता है तब पृष्ठ की गैसों के स्थान पर इसकी निकटस्थ गैसें तल का कार्य करने लगती हैं और विकिरणन पर यह इलेक्ट्रॉनों का स्रोत बन जाता है। ये इलेक्ट्रॉन तात्क्षणिक ऐनोड पर पहुँचते हैं। इस प्रकार पृष्ठ धारा-प्रवाहन में सहयोग देता है, जिसमें $+\triangle i$ का प्रेक्षण होता है।

विगैसित तथा अविगैसित नलियों के ताप के साथ $-\triangle i$ के परिवर्तन के अंतर की व्याख्या अविगैसित निकाय में विद्यमान स्वाभाविक अधिशोषण-तल के आधार पर की जा सकती है। इस तल के अवयवों की पलायन की संभावना बहुत कम होती है, क्योंकि इस पर आविष्ट गैस का एक और तल बन जाता है। ताप की वृद्धि के कारण इस तल के परिणामस्वरूप यह सक्रियित कणों से समृद्ध हो जाता है। इसका परिणाम $+\triangle i$ तथा $-\triangle i$ दोनों की वृद्धि में होता है। विगैसित निकाय में, एक विशिष्ट ऊर्जा प्राप्त करने वाले कण इस तल से पलायन कर जाते हैं ; अतः जैसा कि प्रस्तुत अन्वेषण में प्रेक्षण हुआ है, ताप के साथ $-\triangle i$ क्रमशः घटता जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री वी० सुब्रह्मन्यम् के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है ।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, **प्रोसी० इन्डियन साइंस कॉंग्रेस**, अध्यक्षीय भाषण, रसायन विभाग, 1943, 51.
2. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएसिया इन्डिका**, 1975, **1**, 273.
3. प्रसाद, जे०, **जर्न० बुल० सोसा० किम० बिओग्राड**, 1979, **44(6)**, 461.
4. मोहन्ती, ए० आर०, **जर्न० साइं० इंडस्ट० रिस०**, 1954, **13B**, 467.
5. रिचर, जी०, **फ़िज० जैड०**, 1940, **41**, 229.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

माइजर का G-फलन तथा राबिन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दण्ड में ऊष्मा चालन

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय, इसा टाउन, बहरीन

तथा

साधना मिश्र

सिविल इंजीनियरी विभाग, विद्या भवन रूरल इंस्टीट्यूट, उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त–दिसम्बर 1, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम माइजर के G-फलन वाले दो फल समाकलों का मान निकालेंगे और उनका प्रयोग राबिन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दण्ड में ऊष्मा प्रवाह की समस्या को हल निकालने के लिए किया जावेगा।

Abstract

Meijer's G-function and heat conduction in a rod under Robin condition. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, Univerity of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain and Sadhna Misra, Department of Civil Engineering, Vidya Bhawan Rural Institute, Udaipur (Raj.).

In this paper, we evaluate two integrals involving Meijer's G-function and employ them to obtain a solution of the problem of heat flow in a rod under Robin condition.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य माइजर के G-फलन वाले फलनों का मान ज्ञात करना तथा उनका उपयोग ऊष्मा चालन के लिए हल प्राप्त करना है जो राबिन प्रतिबन्ध या तृतीय प्रकार केसीमा प्रति-

बन्धों के अन्तर्गत समांग दण्ड में होता हो बशर्ते ऊष्मीय गुणांक स्थिर हों और ऊष्मीय ऊर्जा का कोई अन्य स्रोत न हो।

ऐसी स्थितियां जिनमें ठोसों द्वारा उष्मा उत्पन्न होती है उनके तकनीकी संप्रयोग महत्वपूर्ण बनते जा रहे हैं[11]। उष्मा कई प्रकार से उत्पन्न की जा सकती है—(1) विद्युतधारा प्रवाह से (2) परा-वैद्युत या उत्प्रेरण उष्मन (3) रेडियोऐक्टिव क्षय (4) विकिरण से अवशोषण (5) श्यान या प्लास्टिक प्रवाह में यांत्रिक उत्पादन (6) रासायनिक अभिक्रियाएँ।

बाजपेयी[1–10] तथा अन्य शोधकर्त्ताओं ने[14–15] सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों का उपयोग उष्मा चालन, दो गोलाकार चालकों के मध्य वैद्युतस्थैतिक क्षेत्र, विभवसिद्धान्त आदि से सम्बद्ध एक-विमीय सीमा के प्रमेयों के हल के लिए किया है।

उपपत्तियों में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी।

समाकलों का निम्नलिखित परिवर्धित रूप [13, p. 372, (1) (8)]

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\lambda_m \pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{L \sin\frac{\lambda_m \pi}{2}\, \Gamma(\omega)}{2^{w-1}\, \Gamma\left(\frac{\omega+\lambda_m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\omega-\lambda_m+1}{2}\right)}, \quad \mathrm{Re}w>0. \tag{1.1}$$

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \frac{\cos \lambda_m \pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{L \cos\frac{\lambda_m \pi}{2}\, \Gamma(w)}{2^{w-1}\, \Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)} \quad \mathrm{Re}w>0 \tag{1.2}$$

निम्नलिखित लाम्बिक प्रणाली [11, p. 116,(9), तथा (10)]

$$\int_0^L \left[\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x\right] \left[\cos \lambda_m x + \frac{h}{\lambda_m} \sin \lambda_m x\right] dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lambda_n^2+h^2)L+2h}{2\lambda_n^2}, & (m=n); \\ 0, & (m\neq n); \end{cases} \tag{1.3}$$

जहाँ λ_n अबीजीय समीकरण के धनात्मक मूल हैं

$$\tan \lambda L = \frac{2h\lambda}{\lambda^2 - h^2} . \tag{1.4}$$

संक्षिप्तता की दृष्टि से इससे आगे $a_p\ a_1 \ldots, a_p$, के लिए, d धनात्मक पूर्णांक के लिए तथा संकेत $\Delta(d, w)$ प्राचलों के $\frac{w}{d}, \frac{w+1}{d}, \ldots, \frac{w+d-1}{d}$ सेट के लिए प्रयुक्त किया जावेगा।

2. समाकल

जिन समाकलों का मान ज्ञात किया जाना है, वे हैं

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\lambda_m \pi x}{L}\ G_{p,q}^{u,v}\left(z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)dx$$

$$= \frac{L \sin\frac{\lambda_m \pi}{2}}{\sqrt{((d\pi))}}\, G_{p+2d,q+2d}^{u,v+2d}\left(z\middle|\begin{matrix}\Delta(2d,\ 1-w),\ a_b\\ b_q,\ \Delta\left(d, \frac{1-w-\lambda_m}{2}\right), \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right), \tag{2.1}$$

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \cos\frac{\lambda_m \pi x}{L}\ G_{p,q}^{u,v}\left(z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)dx$$

$$= \frac{L \cos\frac{\lambda_m \pi}{2}}{\sqrt{((d\pi))}}\, G_{p+2d,q+2d}^{u,v+2d}\left(z\middle|\begin{matrix}\Delta(2d,\ 1-w),\ a_p\\ b_q,\ \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right), \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right), \tag{2.2}$$

जहां

$$2(u+v) > p+q, |\arg z| < (u+v-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,\ \text{Re}\ (w+2dbj) > 0,\ j=1, \ldots, u.$$

उपपत्ति : समाकल (2.1) को स्थापित करने के लिए समाकल्य में G-फलन को हम मेलिन-बार्निज प्रकार के समाकल [12, p. 207(1)] के रूप में व्यक्त करते हैं और समाकलों के क्रम को परस्पर बदल देते हैं जो इस प्रक्रम में आये समाकलों के परम अभिसरण होने के कारण वैध हो तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{v}\Gamma(1-a_j+s)z^s}{\prod_{j=u+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=v+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\int_0^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w+2s-d-1}$$

$$\sin\frac{\lambda_m\pi x}{L}\,dx\,ds.$$

प्राप्त होता है । अब (1.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने और गामा फलन [12, p. 4, (11)] के लिये गुणन सूत्र का प्रयोग करने पर प्राप्त करते हैं—

$$L\sin\lambda_m\pi/2(d\pi)^{-1/2}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{v}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{i=0}^{2d-1}\Gamma\left(\frac{w+i}{2d}+s\right)z^s}{\prod_{j=u+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=v+1}^{p}\Gamma(a_j-s)\prod_{i=0}^{d-1}\Gamma\left(\frac{(w+\lambda_m+1)/2+i}{d}+s\right)\prod_{i=0}^{d-1}\Gamma\left(\frac{(w-\lambda_m+1)/2+i}{d}+s\right)}ds.$$

अब [12, p. 207, (1)] का व्यवहार करने पर समाकल (2.1) प्राप्त होता है ।

उपर्युक्त विधि को व्यवहृत करने तथा (1.1) के बदले (1.2) का प्रयोग करने पर समाकल (2.2) प्राप्त होता है ।

3. तृतीय प्रकार के सीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समांग दण्ड में उष्मा प्रवाह

हम समांग दण्ड में राबिन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत (शून्य ताप पर माध्यम के भीतर सिरों पर विकिरण) उष्मा संचालन की समस्या पर विचार करेंगे । यदि उष्मीय गुणांक स्थिर हो और उष्मीय ऊर्जा के कोई स्रोत न हों तो एकविमीय दण्ड $0\leqslant x\leqslant L$ में ताप $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{3.1}$$

तुष्टि करता है ।

इस समीकरण के हल को प्रारम्भिक प्रतिबन्ध

$$u(x, 0)=f(x), \tag{3.2}$$

तथा निम्नलिखित सीमा प्रतिबन्धों की तुष्टि करना चाहिए

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)-hu(0, t)=0 ; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)+hu(L, t)=0 ; h>0. \tag{3.4}$$

समीकरण (3.1) की तुष्टि निम्नलिखित व्यंजक द्वारा हो जाती है

$$e^{-k\lambda n^2 t}[A \cos \lambda_n x+B \sin \lambda_n x]. \tag{3.5}$$

समीकरण (3.5) भी (3.3) एवं (3.4) की तुष्टि करता है, बशर्ते कि

$$\lambda_x B-hA=0, \text{ तथा} \tag{3.6}$$

$$\lambda_n[B \cos \lambda_n L-A \sin \lambda_n L]+h[A \cos \lambda_n L+B \sin \lambda_n L]=0. \tag{3.7}$$

(3.6) तथा (3.7) से हमें $A/B=\lambda_{n/n}$ तथा

$$\tan \lambda_n L=\frac{2\lambda_n h}{\lambda_n{}^2-h^2} , \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है जहाँ λ_n (1.4) का nवाँ धनात्मक मूल है ।

तब हमारे प्रमेय का हल निम्नवत् होगा

$$u(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\cos \lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x\right] e^{-k\lambda n^2 t}. \tag{3.9}$$

4. प्रमेय का हल

हम निम्नलिखित पर विचार करें

$$u(x, 0)=\left(\sin \frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} G_{p,q}^{u,v}\left[z\left(\sin \frac{\pi x}{L}\right)^{2d} \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right]. \tag{4.1}$$

जिस प्रमेय का हल प्राप्त करना है वह है

$$u(x,t)=\frac{2L}{\sqrt{((\pi d))}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2{}_{n_e}-k\lambda^2{}_n{}^t}{[(\lambda^2{}_n+h^2)L+2h)]} \tag{4.2}$$

$$\times\left\{\cos\frac{\lambda_n\pi}{2}\ G^{u,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\Delta(2d,\ 1-w),\ a_p\\ b_q,\ \Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_n}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_n}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\lambda_n}\left(\sin\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)G^{v,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\Delta(2d,\ 1w),\ a_p\\ b_q,\ \Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_n}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_n}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right\}\ ,$$

जहां

$2(u+v)>p+q.\ |\arg z|<(u+v-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi,$

$\mathrm{Re}\ (w+2dbj)>0,\ j=1,\ \ldots,\ u.$

उपपत्ति : यदि $t=0$, तो (3.9) तथा (4.1) के आधार पर

$$\left(\sin\frac{\pi w}{L}\right)^{w-1}G^{u,v}_{p,q}\left[\ z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\left|\begin{matrix}a^p\\ b^q\end{matrix}\right.\right] \tag{4.3}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[\ \cos\lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\ \right].$$

(4.3) के दोनों पक्षों में $\left[\cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\ \right]$ से गुणा करने तथा x के प्रति 0 से L तक समाकलन करने पर

$$\int_0^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}\left[\ \cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\ \right]G^{u,v}_{p,q}\left[\ z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_0^L\left[\cos\lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right]\left[\cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\right]dx.$$

अब (2.1), (2.2) तथा (1.3), की सहायता से हमें (4.4) प्राप्त होगा

$$C_m=\frac{2L\lambda_m{}^2}{\sqrt{(\pi d)}\ [\lambda_m{}^2+h^2)L+2h]}$$

$$\times\left\{\cos\frac{\lambda_m\pi}{2}\,G^{u,v-2d}_{y+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1-w),\,a_p\\ b_q,\ \Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_m}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\left.\frac{h}{\lambda_m}\left(\sin\frac{\lambda_m\pi}{2}\left(G^{u,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1-w);\,a_p\\ b_q,\ \Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_m}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right)\right\}. \quad (4.4)$$

(3.9) तथा (4.4) से (4.2) प्राप्त होता है।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०, Proc. Camb. Phil. Soc., 1968, **64**, 1049-1054.
2. वही, J. Sci. Engg. Res. 1969, XIII—1, 149-152.
3. वही, J. Sci. Engg. Res. 1969, XIII—2, 254-257.
4. वही, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1969, **12** (11), 93-97.
5. वही, Proc. Indian Acad. Sci., 1969. **LXX**. 697-701.
6. वही, Proc. Camb. Pill. Soc. 1969, **66**, 349-353.
7. वही, Math. Education, 1969, **74**, 1-4.
8. वही, Jour. Math. Phys. Sci., 1970, **4**, 302-307.
9. वही, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1971, **41** (A), 320-351.
10. वाजपेयी, एस० डी० तथा अलहवाज, ए० वाई०, J. Indian Acad. Math. 1989, **11**, 52-59.
11. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे० सी०, Conduction of heat in solids. Clarendon Press Oxford, 1986.
12. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher transcendental functions, Vol. 1. McGraw Hill, New York, 1953.
13. ग्रैडशत्येन, आर० एस० तथा रिज़िक, आई० एम०, Tables of integrals, series and products. Academic Press, Inc., New York, 1980.
14. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Maths. 348—Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
15. वही, The H-function with applications in statistics and other disciplines. Wiley Eastern Ltd. New Delhi, 1978.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

उराँव जनजाति की कुछ मानवमितीय नापों के पारस्परिक सहसम्बन्धों का अध्ययन

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन के लिए राँची जिले की उराँव-जनजाति के 159 असम्बन्धित बालकों की चार मानवमितीय मापों (कद एवं भार, कद एवं सिर की ऊँचाई, कद एवं शीर्ष-देशना और कद एवं फ्रोन्टो-पेरायटल देशना) के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक (r) को दर्शाया गया है। अध्ययन की सुविधा के लिए सभी बालकों को तीन आयु-समूहों में रखा गया। यह देखा गया है कि जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे भार, शीर्ष-देशना तथा फ्रोन्टो-पेरायटल देशना का मध्यमान बढ़ता जाता हैं। 14-17 वर्ष के आयु-समूह में केवल कद एवं सिर की ऊँचाई में ही धनात्मक महत्वपूर्ण सह-सम्बन्ध पाया गया। ऐसी स्थिति संयोग-सैम्पलिंग तथा सम्भ्रान्त परिवारों से आये बच्चों के कारण हो सकती है।

Abstract

Study on the correlation of few anthropometric measuremcnts of thc Oraon. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar)

The purpose of the present study is to present the co-efficient of correlation('r') between four anthropometric measurements (stature & weight, stature & head height, stature & cephalic index and stature & frontoparietal index) of 159 unrelated boys of the Oraon tribe of Ranchi. The age of the boys ranged from 6 years to 17 years. For convenience, the data have been divided into three age-groups. It is observed that as the mean value of stature increases the mean values of weight, cephalic index and fronto-parietal index also show increment at the various age-groups. In the age group 14—17, significant positive correlation has been observed only in between stature and head height (+15.07) while other measurements show significant negative

correlation. This is perhaps due to the children coming from well-to-do families and chance sampling.

उराँव जनजाति उत्तरी-पूर्वी भारत की प्रमुख जनजातियों में से एक है, जो बिहार में मुख्य रूप से राँची (गुमला तथा लोहरदगा समेत) जिले में पायी जाती है। गुहा[1] ने इन्हें प्रोटो आस्ट्रोल्वायड़ की संज्ञा दी है। शारीरिक मानव विज्ञान की दृष्टि से इस जनजाति में बहुत ही कम अध्ययन हुआ है। कर्क तथा अन्यों[2] ने रक्त-समूह के आधार पर तथा दास शर्मा[3] ने त्वचीय प्रतिरूप के आधार पर उराँव पर सामग्री प्रस्तुत की है लेकिन मानवमिति के आधार पर कोई भी सामग्री प्रकाशित नहीं हुई। उराँव ही नहीं बल्कि समस्त भारतीय लोगों में मानवमिति पर बहुत ही कम शोध कार्य हुआ है। बच्चों की वृद्धि के सम्बन्ध में कुछ कार्य हुए हैं। यह कटु सत्य है कि बच्चे बढ़ते हैं परन्तु वृद्धि की दर प्रत्येक बच्चे में अलग-अलग आयु में एकसमान नहीं होती तथा उन बच्चों में भी एकसमान नहीं होती है जिनका जन्म तथा लालन-पालन विभिन्न आर्थिक स्तर के परिवारों में होता है। विश्व के विभिन्न हिस्सों में किये गये अन्वेषणों से यह पाया गया है कि जिन बच्चों का लालन-पालन उत्तम आर्थिक स्तर के परिवार में हुआ वे अपनी ही उम्र के अन्य बच्चों की तुलना में अधिक लम्बे तथा अधिक भार वाले हुए हैं। मुखर्जी[4,5] ने उच्च विद्यालय, कलकत्ता के 2488 बच्चों तथा कलकत्ता के ही प्राइमरी विद्यालयों के बच्चों में अध्ययन के दौरान यह पाया है कि परिवार की आर्थिक स्थिति बच्चों के शरीर की वृद्धि में एक महत्व-पूर्ण कारक हैं। मन्टागु[6] ने कहा है कि मानव की वृद्धि से सम्बन्धित अध्ययन के लिए आर्थिक स्तर की उपेक्षा करके अध्ययन करना संतोषप्रद नहीं होगा।

प्रस्तुत शोधकार्य में उराँव जनजाति के दो मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्धों को दर्शाया गया है पर इसमें विभिन्न वर्ग-समूह में वृद्धि परिवर्तन नहीं दिखाया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए 159 असम्बन्धित बालकों (बालिकायें नहीं) को मापा गया जिनकी उम्र 6 वर्ष से 17 वर्ष की थी। इसके लिए आर० सी० बालक मध्य विद्यालय बनारी, मध्य विद्यालय नरमा तथा आवासीय उच्च विद्यालय जोभीपाट से 'डाटा' उपलब्ध किये गये। 159 बालकों में से 22 बच्चे अपेक्षाकृत संभ्रान्त परिवारों के थे। शेष में से अधिकांश निम्न से निम्नतर आर्थिक स्थिति वाले परिवारों के थे। विद्यालय में अंकित उम्र को ही सही उम्र माना गया। मापने के लिए मार्टिन[7] की विधि अप-नाई गयी तथा सभी मापों को मिमी० में अंकित किया गया। भार पौंड में लिया गया। इसके लिए जूतों को हटा दिया गया और शरीर पर कम-से-कम वस्त्र रखे गये।

परिणाम तथा विवेचना

अध्ययन की सुविधा के लिए सभी बालकों को तीन आयु-समूहों में रखा गया और आवश्यकता पड़ने पर यह माना गया कि यदि किसी बालक की उम्र 9 वर्ष 1 महीना से 6 महीना तक है तो उसे 9 वर्ष के अन्तर्गत रखा गया और यदि उसकी उम्र 9 वर्ष 7 महीने से ऊपर है तो उसे 10 वर्ष के

अन्तर्गत रखा गया। इसी प्रकार अन्य समूहों में भी किया गया। इस प्रकार प्रस्तुत शोधकार्य में आयु-समूहों में बालकों की संख्या निम्नलिखित है—

आयु-समूह	कुल संख्या
6—9	22
10—13	84
14—17	53
	159

सम्पूर्ण वृद्धि प्राप्त करने के लिए निम्न आयु-समूह को उसके बाद वाले उच्च आयु-समूह में से घटा दिया गया है तथा सम्बन्धित वृद्धि % की गणना निम्नलिखित सूत्र से की गई

$$\frac{M_2-M_1}{M_1}\times 100$$

जहां M_2 उच्च आयु-समूह का मध्यमान, M_1 निम्न आयु-समूह का मध्यमान। प्रस्तुत अध्ययन के लिए मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r' आंकने के लिए वेली[8] के द्वारा प्रतिपादित नियम अपनाया गया तथा पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r' को महत्वपूर्ण होने के लिए 't' का मान (स्टुडेन्ट्स 't' टेस्ट) की गणना निम्नलिखित सूत्र से की गई

$$'t'=\frac{r\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{(1-r^2)}}$$

जहाँ

r=सहसम्बन्ध गुणांक, n= नमूनों की संख्या

निम्नलिखित मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला गया है—

(i) कद एवं भार (ii) कद एवं सिर की ऊँचाई

(iii) कद एवं शीर्ष देशना (iv) कद एवं फ्रोन्टों-पेरायटल देशना

सारणी 1

विभिन्न आयु-समूहों में विभिन्न मापों से संबन्धित आंकड़े

आयु-समूह	माप	विस्तार	माध्य	संपूर्ण	संबन्धित वृद्धि प्रति वर्ष
6-9	कद	1169-1482	1274.2	—	—
	सिर की ऊँचाई	106-130	120.5	—	—
	शीर्ष देशना	66.7-83.5	72.6	—	—
	फ्रोन्टो पेरायटल देशना	69.0-82.8	75.4	—	—
	भार	37-67	47.4	—	—
10-13	तथैव	1231-1688	1414.7	I44.5	11.10
		106-136	118.8	1.7	1.4
		64.0-81.6	73.6	1.0	1.4
		68.7-84.8	75.3	—0.1	—0.1
		40-104	63.4	16	33.8
14-17	तथैव	1404-1737	1592.07	173.4	12.2
		106-137	121.5	2.7	2.3
		67.3-78.0	74.2	0.6	0.8
		68.5-83.3	75.8	0.5	0.7
		64-121	92.8	29.4	46.3

उपर्युक्त सारणी के विश्लेषण से यह प्राप्त होता है कि 6 से 17 वर्ष के बच्चों में जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे भार शीर्ष देशना तथा फ्रोन्टो पेरायटल देशना का मध्यमान बढ़ता जाता है। सिर की ऊँचाई का मध्यमान 6-9 वर्ष के आयु-समूह में 120.5 मिमी० है जो 10-13 वर्ष के आयु-समूह में थोड़ा कम (118.8 मिमी) देखा जाता है। लेकिन 14-17 वर्ष के आयु-समूह में पुनः बढ़ा हुआ मान (121.5 मिमी) प्राप्त होता है।

सारणी 2

विभिन्न आयु-समूह में पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r'

सह-सम्बन्ध	6-9 वर्ष (n=22)		10-13 वर्ष (n=84)		14-17 वर्ष (n=53)	
	'r' का मान	't' का मान	'r' का मान	't' का मान	'r' का मान	't' का मान
कद एवं भार	+00±0.04	9.2*	+0.9±0.02	18.8*	−0.7±0.04	7.7*
कद एवं सिर की ऊँचाई	+0.1±0.2	1.46	+0.1±0.09	3.0*	+0.9±0.01	15.07*
कद एवं शीर्ष देशना	+0.1±0.2	1.46	+0.3±0.09	1.38	−0.3±0.009	2.16*
कद एवं फ्रोन्टो पेरायटल देशना	+0.2±0.12	3.1*	−0.2±0.08	6.4*	−0.9±0.01	15.07*

*सार्थक अन्तर दर्शाता है (0.05 पर)

सारणी 2 से निम्नलिखित मुख्य बातें प्राप्त होती हैं—

(i) बालकों के आयु-समूह 6-9 एवं 10-13 में कद एवं भार के बीच सार्थक धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध पाया गया लेकिन 14-17 आयु-समूह में ऋणात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध देखा जाता है जबकि इस समूह में बालकों की संख्या प्रथम समूह से दुगुनी से भी अधिक है।

(ii) **कद एवं सिर की ऊँचाइ के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध** इन दोनो मापों के बीच सभी आयु-समूह में धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध देखा गया लेकिन सार्थक परिणाम 6—9 आयु-समूह को छोड़कर अन्य दोनों आयु-समूहों में प्राप्त होता है।

(iii) **कद एवं शीर्ष-देशना के बीच पारस्परिक** सह-सम्बन्ध 6-9 एवं 10-13 आयु-समूह के बालकों के बीच दोनों का पारस्परिक सह-सम्बन्ध धनात्मक लेकिन निरर्थक पाया गया है जबकि 14-17 आयु-समूह के बालकों के बीच सार्थक ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया गया।

(iv) **कद एवं फ्रोन्टो-पेरायटल देशना के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध** : इन दोनों मापों के बीच सार्थक धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध का मान सिर्फ 6-9 वर्ष के आयु-समूह के बीच आता है तथा शेष दोनों आयु-समूहों के बीच सार्थक ऋणात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध प्राप्त होता है।

सारणी 1 से स्पष्ट है कि बालकों में जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे अन्य मापों का मध्यमान भी बढ़ता गया है। लेकिन सारणी 2 में दो मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक (r) के मान में थोड़ा अन्तर पाया गया। संयोग-सैंपलिंग तथा संभ्रान्त परिवारों से आये बच्चों के कारण ऐसी स्थिति हो सकती है।

निर्देश

1. गुहा, बी० एस० "द रेसियल एफिनिटिज ऑफ द पिपुल ऑफ इंडिया" सेंसस ऑफ इंडिया 1935 भाग 1 खंड III, दिल्ली
2. कर्क, आर० एल०, एल० वाई० सी० लाई, जी० एच० भो तथा एल० पी० विद्यार्थी "ए जेनेटिकल स्टडी ऑफ दी उराँव ऑफ छोटानागपुर प्लेटु" इन सम आस्पेक्टस ऑफ अप्लाइड फीजिकल **एन्थ्रोपोलोजी**, 1963,52, 113-129.
3. दास शर्मा, पी०, **जनरल ऑफ सोसल रिसर्च**, 1978, XXI—2, 148-167.
4. मुखर्जी, आर०, **द इंडियन जरनल ऑफ स्टेटिक्स**, 1951, 2, 47-16.
5. मुखर्जी, आर०, **अप्लाइड एन्थ्रोपोलोजी इन इंडिया**, 1968, 508.
6. मोन्टागु, एम० एफ० ए०, स्प्रींगफिल्ड, यु० एस० ए०, 1960.
7. मार्टिन, आर०, **लेब्रबुच डर एन्थ्रोपोलोजी**, 1928, 1—2—3.
8. बेली, एन० टी० जे०, **स्टेटिसटिकल मेथड्स इन बायोलाजी**, 1959.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Editor
Dr. Chandrika Prasad
D. Phil.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 July 1990 No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद्

विषय-सूची

1. लैप्लास श्रेणी के आंशिक योग के क्रम के सम्बन्ध में
सुशील शर्मा ... 135

2. जैकोबी श्रेणी के $(C, 1)$ माध्य द्वारा फलन का सन्निकटन
नेहा ब्यौहार, वर्षा सोहले तथा अर्चना ब्यौहार ... 143

3. वाराणसी के श्मशान घाटों के अवसाद का अध्ययन
सच्चिदानन्द सिंह तथा महाराज नारायण मेहरोत्रा ... 151

4. कचरी का शाखा तन्त्र एवं सरबो बया द्वारा नीड सौन्दर्यकरण
सतीश कुमार शर्मा ... 161

5. संयुग्मी फूरियर श्रेणी द्वारा संतत फलनों के एक वर्ग की सन्निकटन मात्रा
टीकम सिंह ... 171

6. संहत दूरीक समष्टि पर स्थिर बिन्दु प्रतिचित्रण
राजेश कुमार पाण्डेय ... 177

7. तेली जाति के परिवार में ब्रेकीडक्टायली (छोटी अंगुली) की वंशावली
चतुर्भुज साहू ... 181

8. कॉपर (III) अभिकर्मक द्वारा कुछ पालीहाइड्रॉक्सी तथा थायोकार्बनिक यौगिकों का सूक्ष्म निर्धारण
ईश्वर चन्द्र शुक्ल तथा संजय शुक्ल ... 187

9. मसूरी राँक फास्फेट के साथ वाहित मल-जल (सीवेज) एवं अवमल (स्लज) का उपयोग
शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि ... 193

10. 2-दूरीक समष्टियों में अनद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय सम्बन्धी परिणाम
आर० पी० दुबे तथा एच० के पाठक ... 201

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 3, 1990

लैप्लास श्रेणी के आंशिक योग के क्रम के सम्बन्ध में

सुशील शर्मा

गणित विभाग, कालिदास कन्या महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—मार्च 30, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने ब्योहर द्वारा स्थापित प्रमेय[1] का संशोधन किया है। इस प्रपत्र का उद्देश्य हालैंड के सर्वेक्षण निबन्ध[4] का अनुगमन करते हुये नवीन परिणाम प्रस्तुत करना है।

Abstract

On order of partial sum of Laplace series. *By* Sushil Sharma, Department of Mathematics, Kalidas Girls College, Ujjain (M. P.)

In the present note, we improve a theorem established by Beohar[1]. The purpose of this paper is to give a new result on this line after the survey article of Holland.[4]

1. प्रस्तावना

माना कि $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जो परास $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ में परिभाषित किया जाता है और गोला S के पृष्ठ पर समाकलनीय (L) है। इस फलन की संगत लाप्लास श्रेणी है—

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum \left(n+\frac{1}{2}\right) \iint_S f(\theta', \phi') P_n(\cos \omega)\, d\sigma' \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\cos \omega = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$$

तथा

$$d\sigma' = \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

तथा लीजेंड्र बहुपद $P_n(x)$ को निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा परिभाषित किया गया है—

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n P^n(x) \tag{1.2}$$

काम्बेतलियान्ट्ज[5] के आधार पर हम फलन $f(\theta, \phi)$ के सार्विकृत माध्य मान को

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi \sin \omega}\int_{\omega} f(\theta', \phi')d\sigma' \tag{1.3}$$

द्वारा परिभाषित करेंगे जहाँ समाकल को एक लघुवृत्त C_ω पर लिया जाता है जिसका केन्द्र गोले पर बिन्दु (θ, ϕ) है और जिसकी वक्ररेखी त्रिज्या ω है। हम लिखेंगे कि

$$F(\omega)=f(\omega)\,(\sin \omega)^{\alpha-1/p} \tag{1.4}$$

तथा

$$\left\{\frac{d}{dx}(P_n(x))+\frac{d}{dx}(P_{n+1}(x))\right\}_{x=\cos \omega}=P_n'(\cos \omega)+P_{n+1}'(\cos \omega)$$

ज़ासा[6] ने फलन $f(t)$ की फूरियर श्रेणी के लिये एक प्रमेय स्थापित की जो अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) है तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। विल्सन[8] ने लीजेण्ड्र श्रेणी के आंशिक योग के क्रम का परिकलन किया। ब्योहर[1] ने विल्सन के परिणाम[8] का सार्वीकरण किया। गुप्ता तथा साहनी[3] ने विल्सन के प्रमेय का[8] और आगे सार्वीकरण करते हुये निम्नलिखित परिणाम की स्थापना की—

प्रमेय : यदि

$$\alpha>-\tfrac{1}{2},\ \beta>-\tfrac{1}{2},\ 0\leqq k\leqq \max\,(\alpha+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2})$$

तथा यदि समाकलों

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{(\alpha+k)/2-1/4}\,(1+x)^{(\beta+k)/2-1/4}\,f(x)\,dx \tag{1.5}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{(\beta+k)/2-1/4}\,(1+x)^{(\alpha+k)/2-1/4}\,f(x)\,dx$$

का अस्तित्व हो तो

$$S_n(x)=\left\{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\right. =0(n^k) \text{ क्योंकि } 0<K\leqq \max\,(\alpha+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2})$$

$$=0\,(\log_n) \text{ क्योंकि } K=0$$

प्रायः $x\in(-1, 1)$ के लिये।

इस प्रपत्र में हम लाप्लास श्रेणी (1.1) के आंशिक योगों के क्रम की परिगणना करेंगे। हमारा प्रमेय किसी पूर्ववर्ती परिणाम की विशिष्ट दशा नहीं है। हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे—

प्रमेय : यदि $p>2$, $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, तथा

$$F(\omega)\in \text{lip}\ (\alpha-\tfrac{1}{2}) \tag{1.6}$$

तो

$$S_n=\begin{cases} 0\ (n^{1/2-\alpha+1/p}),\ 0<\frac{1}{2}-\alpha+1/p<\frac{1}{2} \text{ या } \alpha p>1 \\ 0\ (\log n) \qquad \frac{1}{2}-\alpha+1(p=0 \end{cases}$$

जहाँ S_n सूचित करता है (1.1) श्रेणियों के nवें आंशिक योग को।

2 प्रमेयिकायें

प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

$$\{P_n'(\cos\omega)+P'_{n+1}(\cos\omega)\}=0(n^2) \tag{2.1}$$

ω के समस्त मानों के लिए।

प्रमेयिका 2

$\pi-n^{-1}\leqslant\omega\leqslant\pi$ के लिये

$$\{P_n'(\cos\omega)+P'_{n+1}(\cos\omega)\}\sin\omega=O(n\sin\omega) \tag{2.2}$$

प्रमेयिका 3

$$[P_n'(\cos\omega)+P_{n+1}'\ (\cos\omega)]\sin\omega=-2/\pi\ R[(n+1)e^{i[(n+1)\omega+\pi/4]}\ (\cot\omega/2)^{1/2}$$
$$\times\{[\Gamma\tfrac{1}{2}(u+1)^{-1/2}+O(n^{-3/2}(\sin\omega)^{-1})\}]+O(n^{-1/2}(\sin\omega)^{-1/2})$$
$$+O(n^{-1/2}(\sin\omega)^{-1/2}\omega^{-1})+O(n^{-3/2}(\sin\omega)^{-3/2})$$

$a_n\leqslant\omega\leqslant\pi-n^{-1}$ में जहाँ $a_n\geqslant 1/n$।

प्रमेयिकाओं की उपपत्ति के लिये देखें डुप्लेसिस[2]।

3. प्रमेय की उपपत्ति

(1.1) तथा (1.3) को दृष्टि में रखते हुये श्रेणी (1.1) के nवें आंशिक योग S_n को निम्न प्रकार दिया जाता है

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(k+\tfrac{1}{2})\int_0^{\pi} f(\omega)P_k(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega \tag{3.1}$$

सैन्सोन[7] से ज्ञात है कि

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(\cos\omega)+P'_{n+1}(\cos\omega)]+P'_{n+1}(\cos)] \tag{3.2}$$

(1.4), (3.1) तथा (3.2) सम्बन्धों से,

$$S_n=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}F(\omega)\,[P_n'\,[\cos\omega)+P'_{n+1}(\cos\omega)]\,(\sin\omega)^{1-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\int_0^{\alpha_n}+\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}}+\int_{\pi-n^{-1}}^{\pi}\right)F(\omega)\,[P_n'\,(\cos\omega)+P'_{n+1}(\cos\omega)](\sin\omega)^{1-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=I_1+I_2+I_3 \text{ मान लिया} \tag{3.3}$$

जहाँ

$$\alpha_n=\begin{cases}(n^{-2/(2+\alpha-1/p)}),\ \alpha-1/p>0\\ (\log n)^{1/2}n^{-1},\ \tfrac{1}{2}-\alpha+1/p=0\end{cases} \tag{3.4}$$

[डुप्लेसिस[2] के आधार पर]

अब प्रमेयिका 1 के सम्प्रयोग से

$$I_1=O(n^2)\int_0^{\alpha_n}\omega^{\alpha-1/p}\,\omega^{1-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=O(n^2)\int_0^{\alpha_n}\omega\,d\omega$$

$$=O(1) \tag{3.5}$$

अब प्रमेयिका 2 तथा $F(\omega)$ की परिबद्धता का प्रयोग करने पर

$$I_3=O(n)\int_{\pi-n^{-1}}^{\pi}(\sin\omega)^{1-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=O(1). \tag{3.6}$$

अन्त में प्रमेयिका 3 का सम्प्रयोग करने पर

$$I_2=-\frac{1}{\pi}R\left[\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}}(n+1)\,e^{i[(n+1)\omega+\pi/4]}F(\omega)\,(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}\right.$$

$$\left.\times\left(\cot\frac{\omega}{2}^{1/2}\right)\left\{\left[\Gamma\tfrac{1}{2}\,(n+1)^{-1/2}+O(n^{-3/2}(\sin\omega)^{-1})\right]\right\}d\omega\right.$$

$$+O(n^{-1/2})\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}} F(\omega)\,(\sin\omega)^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$+O(n^{-1/2})\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}} F(\omega)\,\omega^{-1}\,(\sin\omega)^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}+I_{2\cdot3}+I_{2\cdot4}+I_{2\cdot5} \text{ माना ।} \tag{3.7}$$

अब

$$I_{2\cdot2}=O(n^{-1/2})\int_{\alpha n}^{\pi/2}\omega^{\alpha-1/p}\,\omega^{-1/2}\,\omega^{-\alpha+1/p-1}\,d\omega+O(n^{-1/2})$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi-n^{-1}}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p-1}\,d\omega$$

$$=O(1).$$

$$I_{2\cdot3}=O(n^{-1/2})\int_{\alpha n}^{\pi/2}\omega^{\alpha-1/p}\,\omega^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega+O(n^{-1/2})\int_{\pi/2}^{\pi-n^{-1}}(\sin\omega)^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=O(1).$$

$$I_{2\cdot4}=O(n^{-1/2})\int_{\alpha n}^{\pi/2}\omega^{\alpha-1/p}\,\omega^{-1}\,\omega^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$+O(n^{-1/2})\int_{\alpha^n}^{\pi/2}(\sin\omega)^{-1/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=O(1). \tag{3.10}$$

$$I_{2\cdot5}=O(n^{-3/2})\int_{\alpha n}^{\pi/2}\omega^{\alpha-1/p}\,\omega^{-3/2-\alpha+1/p}\,d\omega+O(n^{-3/2})\int_{\pi/2}^{\pi-n^{-1}}(\sin\omega)^{-3/2-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=O(1). \tag{3.11}$$

अन्त में हम विचार करते हैं

$$I_{2\cdot1}=R\left\{-\frac{1}{\pi}e^{i\pi/4}(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}}e^{i(n+1)\omega}F(\omega)\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}\,d\omega\right\}$$

अब हम लिखेंगे

$$(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}}e^{i(n+1)\omega}F(\omega)\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}\,d\omega$$

$$=\tfrac{1}{2}(n+1)\left\{\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}} e^{i(n+1)\omega}F(\omega)\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}\,d\omega\right.$$

$$\left.-\int_{\alpha n}^{\pi-/\lambda_m-n^{-1}} e^{i(n+1)\omega}F(\omega+\lambda m)\left(\cot\left(\frac{\omega+\lambda m}{2}\right)\right)(\sin\ (\omega+\lambda m))^{-\alpha+1/p}\,d\omega\right\}$$

जहाँ

$$\lambda m=\frac{\pi}{n+1}$$

तथा फलस्वरूप मोडुलस में यह कम है अपेक्षा

$$=\tfrac{1}{2}\ (J_1+J_2+J_3+J_4)\ \text{के}\ । \tag{3.12}$$

होल्डर की असमिका का प्रयोग करने पर

$$J_1=(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n-\lambda m}^{\alpha_n}|F(\omega+\lambda m)\left(\cot\left(\frac{\omega+\lambda m}{2}\right)\right)^{1/2}(\text{sln}\ (\omega+\lambda m))^{-\alpha-1/p}|\ d\omega$$

$$J_2=(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n-\lambda m}^{\pi-n^{-1}}|F(\omega)\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}|d\omega$$

$$J_3=(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}\lambda m}|F(\omega+\lambda m)-F(\omega)|\left(\cot\left(\frac{\omega+\lambda m}{2}\right)\right)^{1/2}(\sin(\omega+\lambda m))^{-\alpha+1/p}d\omega$$

$$J_4=(n+1)^{1/2}\int_{\alpha n}^{\pi-n^{-1}}\left|\left(\cot\left(\frac{\omega+\lambda m}{2}\right)\right)^{1/2}(\sin\ (\omega+\lambda m))^{-\alpha+1/p}\right.$$

$$\left.-\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}(\sin\omega)^{-\alpha+1/p}|F(\omega)d\omega\right.$$

अब $J_1=O(n^{1/2})\binom{\alpha-1/p-1/2-\alpha+1/p}{\alpha n\quad \alpha n\quad \alpha n\quad \lambda m}$ जिसमें $(3.4)=O(1)$ का प्रयोग हुआ है, (3.13)

$$J_2=O(n^{1/2})\int_{\pi-n^{-1}-\lambda m}^{\pi-n^{-1}}\omega^{\alpha-1/p}\omega^{-1/2-\alpha+1/p}d\omega=O(1). \tag{3.14}$$

$$J_3=O(n^{1/2})\int_{\alpha n}^{\pi}O\{(\lambda m)^{\alpha-1/p}\}\ \omega^{-1/2-\alpha+1/p}\ d\omega=O(n^{1/2-\alpha+1/p})\ \text{जहाँ}\ \alpha p>1 \tag{3.15I}$$

$$=O(\log n),\ \tfrac{1}{2}-\alpha+1/p=0 \text{ पर} \qquad (3.15\ \text{II})$$

तथा अन्त में

$$J_4=O(n^{1/2})\int_{\alpha n}^{\pi} \lambda m\ \omega^{-\alpha+1/p-1/2}\omega^{\alpha-1/p}d\omega=O(1). \qquad (3.16)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० बी० के० व्योहर ने जो मार्ग-दर्शन किया उसके लिये लेखक कृतज्ञ है।

निर्देश

1. व्योहर, बी० के०, *On* order of partial sum of Legendre series. *Ph. D. thesis, Vikram University, Ujjain Gh.* 8, 1966.

2. डु प्लेसिस, एन०, *Journ. Lond. Math. Soc.*, 1952, **27**, 337-352.

3. गुप्ता, डी० पी० तथा साहनी, बी० एन० *Math. Mag.*, 1974, **44**, 337-343.

4. हालैंड, ए० एस० बी०, *SIAM Review*, 1981, **23**(3), 344-379

5. काम्बेतलियान्ट्ज, बी०, *Journ. de Mathematiques*, 1924, **3**(9), 107-187.

6. ज़ासा, ओ० *Trans. American Math. Soc.*, 1940, **48**, 117-125.

7. सैन्सोन, जी०, Orthogonal Functions (English Edition). *Academic Press*, 1959, *New York*.

8. विल्सन, बी० एम०, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1922, **21**(2), 389-400.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 3, 1990

जैकोबी श्रेणी के $(C, 1)$ माध्य द्वारा फलन का सन्निकटन

नेहा ब्यौहार, वर्षा सोहले तथा अर्चना ब्यौहार
गणित प्राध्ययन केन्द्र, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 6, 1990]

सारांश

इस शोधपत्र में अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x=1$ पर जैकोबी श्रेणी के $(C, 1)$ माध्य के मान का प्राक्कलन किया गया है।

Abstract

Approximation of functions by (C, 1) mean of Jacobi series. *By* Neha Beohar, Varsha Sohle and Archana Beohar, School of Studies in Mathematics, Vikram University, Ujjain (M. P.)

In this paper we study the order estimate of $(C, 1)$ mean of Jacobi series at the end points.

1. माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। श्रेणी को $(C, 1)$ माध्य से योज्य कहा जाता है यदि

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v=s \qquad (1.1)$$

$$n\to\infty$$

2. माना कि $f(x)$ लेबेस्क मापकीय फलन है जो परास $-1\leqslant x\leqslant 1$ के लिये परिभाषित है। $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी

$$f(x)\sim\Sigma a_n P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x),\ \alpha>-1,\ \beta>-1 \qquad (2.1)$$

जहाँ $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद हैं द्वारा दी जाती है, जहाँ

$$a_n=\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\,n+1!\,n+\alpha+\beta+1!}{n+\alpha+1!\,n+\beta+1!}\cdot\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}f(t)\;P_n^{\beta,(\alpha)}(x)\,dx.$$

विशिष्ट स्थिति में जब $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$ हो, श्रेणी (2.1) परागोलीय श्रेणी में, एवं $\lambda=\frac{1}{2}$ रखने पर श्रेणी (2.1) लेजेन्ड्र श्रेणी में परिवर्तित हो जाती है।

हम मानेंगे कि

$$F(\phi)=\{f(\cos\phi)-A\}\,(\sin\phi/2)^{2\alpha+1}(\cos\phi/2)^{2\beta+1} \tag{2.2}$$

विगत दो दशकों में फूरिये त्रिकोणमितिय श्रेणी की संकलनीयता से सम्बन्धित बहुत से प्रमेय सिद्ध किये गये हैं। अभी चौधरी[1] ने फूरिये जैकोबी श्रेणी का $(C, 1)$ माध्य से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय A : यदि $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$, $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$ और

$$F_1(t)=\int_0^t|F(\phi)|d\phi=O\left(\frac{t^{\alpha+3/2}}{\log\triangle 1/t}\right),\ \triangle>0 \tag{2.3}$$

हो तो $t\to o$

$$S_n^{(1)}(1)=\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu=O\left[\frac{n^{\alpha+1/2}}{(\log_n)\,\triangle}\right]\ n\to\infty \tag{2.4}$$

3. इस प्रपत्र में हमने प्रतिबन्ध (2.3) को अधिक व्यापक करके $\sigma_n(1)$ का अध्ययन किया है। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $\sigma_n(1)$ श्रेणी (2.1) का प्रथम क्रम का nवां चिजारो योग हो, और

$$F_1(t)=\int_0^t|F(\phi)|d\phi=O\left\{t^{1+p}(\log 1/t)^{\lambda}\right\} \tag{3.1}$$

जहाँ

$$p>0,\ \lambda>0$$

तथा

$$\int_{-1}^{b}(1+x)^{\beta/2-3/4}|f(x)|dx<\infty \tag{3.2}$$

तो

$$\sigma_n(1)=O\{n^{-(p-2\alpha-1)}(\log n)^{\lambda}\} \tag{3.3}$$

जहाँ

$$\alpha\geqslant-\tfrac{1}{2},\ \beta\geqslant-\tfrac{1}{2}$$

4. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 : (झेगो (4) पृष्ठ 167)

$$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)=O(n^{\alpha}),\ 0\leqslant\theta\leqslant c/n \tag{4.1}$$

जहाँ α, β स्वेच्छ वास्तविक अचर हैं।

प्रमेयिका 2 : (झेगो (4) पृष्ठ 167)

यदि $\alpha>-1$, $\beta>-1$ और $c/n\leqslant\theta\leqslant\pi-1/n$, तो

$$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)=n^{-1/2}\,k(\theta)\left[\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\theta+\gamma\right\}+O(1)\,(n\sin\theta)^{-1}\right] \tag{4.2}$$

जहाँ

$$k(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2}(\cos\theta/2)^{-\beta-1/2}\,;\ \gamma=-(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi/2$$

प्रमेयिका 3 : (गुप्ता डी० पी०(2))

प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b}(1+x)^{\beta/2-3/4}|f(x)|dx<\infty$$

के लगाने से $\beta>-1/2$ के लिये

$$\int_{a=\cos^{-1}b}^{t}|f(\cos\theta)-A|\,(\cos\theta/2)^{\beta-1/2}d\theta.<\infty \tag{4.3}$$

और

$$\int_0^{1/n}t^{\beta-1/2}\,|f(-\cos t)-A|dt=O(1) \tag{4.3}$$

5. **प्रमेय की उपपत्ति**

आब्रेश्काफ[3] का अनुसरण करने पर श्रेणी (2.1) का बिन्दु $x=1$ पर nवाँ आंशिक योग

$$s_n(1)=2^{\alpha+\beta+1}\lambda_n\int_0^{\pi}F(\theta)\,P_n^{(\alpha+1,\ \beta)}(\cos\phi)\,d\phi \tag{5.1}$$

जहाँ

$$\lambda_n\sim\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\alpha+1\,!}n^{\alpha+1}$$

अत:

$$\sigma_n(1)=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v(1)=\frac{1}{n+1}\cdot I \tag{5.2}$$

जहाँ

$$I=\int_0^{\pi} F(\phi)2^{\alpha+\beta+1}\sum_{v=0}^{n}\lambda_v P_v^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi$$

अब हम I पर विचार करेंगे

$$I=\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}=I_1+I_2+I_3+I_4$$

I_1 में (4.1) का उपयोग करने पर

$$I_1=O(n^{2\alpha+3})\int_0^{1/n}|F(\phi)|d\phi$$

$$=O\{n^{2\alpha+2-p}(\log n)^{\lambda}\} \tag{5.3}$$

अब

$$I_2=\int_{1/n}^{\delta}F(\phi)\,k_n(\phi)\,d\phi.$$

जहाँ

$$k_n(\phi)=2^{\alpha+\beta+1}\sum_{v=0}^{n}\lambda_v P_v^{(\alpha+1,\,\beta)}(\cos\phi)$$

(4.2) में दिये गये $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(\cos\theta)$ के अनन्तस्पर्शी मान का उपयोग करने पर

$$k_n(\phi)=\frac{1}{(\alpha+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^{\alpha+1/2}}{\sqrt{\pi}}(\sin\phi/2)^{-\alpha-3/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-1/2}$$

$$\cos\{k\phi+\rho\phi-\gamma\}+\frac{O(1)}{k\sin\phi};\ \rho=\frac{\alpha+\beta+2}{2},\ \gamma=\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)_{\pi/2}$$

$$=(\sin\phi/2)^{-\alpha-3/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-1/2}\Big[\cos(\gamma-\rho\phi)\sum_{k=0}^{n}k^{\alpha+1/2}\cos k\phi$$

$$+\sin(\gamma-\rho\phi)\sum_{k=0}^{n}k^{\alpha+1/2}\sin k\phi\Big]$$

$$+O(1)\sum_{k=0}^{n}k^{\alpha-1/2}(\sin\phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-3/2} \tag{5.4}$$

आबेल रूपान्तरण की मदद से हम पाते हैं कि

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2} \cos k\phi = O\,(n^{\alpha+1/2})\,(\sin \phi/2)^{-1} \quad n\phi \geqslant 1$$

और

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2} \sin k\phi = O\,(n^{\alpha+1/2})\,(\sin \phi/2)^{-1} \quad n\phi \geqslant 1$$

इसलिये

$$|\,k_n(\phi)| = O[n^{\alpha+1/2}(\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos \phi/2)^{-\beta-1/2}]$$

$$+O[n^{\alpha+1/2}(\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos \phi/2)^{-\beta-3/2}]$$

अत:

$$|I_2| = O(n^{\alpha+1/2}) \left[\int_{1/n}^{\delta} (\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2} (\cos \phi/2)^{-\beta-1/2} |F(\phi)|\,d\phi\right.$$

$$\left. + \int_{1/n}^{\delta} (\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2} (\cos \phi/2)^{-\beta-3/2} |F(\phi)|\,d\phi\right]$$

$$= O(n^{\alpha+1/2}) \int_{1/n}^{\delta} \frac{|F(\phi)|\,d\phi}{\phi^{\alpha+5/2}}$$

$$= O(n^{\alpha+1/2}) \left[\frac{1}{\phi^{\alpha+5/2}} F_1(\phi)\right]_{1/n}^{\delta} + O(n^{\alpha+1/2}) \int_{1/n}^{\delta} \phi^{-\alpha-7/2} F_1(\phi)\,d\phi.$$

$$= O(n^{\alpha+1/2}) \left[\frac{1}{\phi^{\alpha+5/2}} \phi^{1+p} (\log 1/\phi)^{\lambda}\right]_{1/n}^{\delta} + O(n^{\alpha+1/2}) \int_{1/n}^{\delta} \phi^{-\alpha+p-5/2} (\log 1/\phi)^{\lambda}\,d\phi$$

(3.1) से

$$= O(n^{2\alpha+2-p} (\log n)^{\lambda}) \tag{5.5}$$

अब हम I_3 के मान की गणना करेंगे ।

$$|I_3| = O\left[\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\phi)| n^{\alpha+1/2} (\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2} (\cos \phi/2)^{-\beta-1/2}\,d\phi.\right.$$

$$\left. + O\left[\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\phi)|\, n^{\alpha+1/2} (\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2} (\cos \phi/2)^{-\beta-3/2}\,d\phi\right]\right.$$

$$= O(n^{\alpha+1/2}) \int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\cos \phi) - A| \cos \phi/2 (\cos \phi/2)^{\beta-1/2}\,d\phi$$

$$+ O\,(n^{\alpha+1-2}) \int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\cos \phi) - A| \cos \phi/2)^{\beta-1/2}\,d\phi$$

$$= O\,(n^{\alpha+1/2}),\ [\text{प्रमेयिका 3 के अनुसार}]$$

$$= O\,\{(n^{\alpha+1/2}) (\log n)^{\lambda}\} \tag{5.6}$$

और अन्त में

$$|I_4|=\int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\phi)\ k_n(\phi)|d\phi$$

यदि $\phi=\pi-1/t,\ O<t\leqslant 1/n$ तब

$$k_n(\phi)=\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k^{(\beta,\alpha+1)}(-\cos t)$$

अत: प्रमेयिका (1) से

$$|k_n(\phi)|=O\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+\beta+1}=O(n^{\alpha+\beta+2})$$

अत:

$$|I_4|=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\cos\phi)-A|\ (\sin\phi/2)^{2\alpha+1}\ (\cos\phi/2)^{2\beta+1}\ d\phi$$

$$=O\ (n^{\alpha+\beta+2}\int_0^{1/n} |F(-\cos\phi)-A|\ \phi^{2\beta+1}\ d\phi.$$

$$=O\ (n^{\alpha+1/2})\int_0^{1/n} |F(-\cos\phi)-A|\phi^{\beta-1(2}\ d\phi$$

$$=O\ \{n^{2\alpha+2-p}\ (\log n)^{\lambda}\} \qquad (5.7)$$

अत:

(5.3), (5.5), (5.6) एवं (5.7) से हम पाते हैं कि

$$I=O\ \{n^{2\alpha+2-p}\ (\log n)^{\lambda}\} \qquad (5.8)$$

अत:

$$\sigma_n(1)=O\ \{n^{-(p-2\alpha-1)}\ (\log n)^{\lambda}\} \qquad (5.9)$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

हम डॉ० घनश्याम पांडे, अध्यक्ष गणित, प्राध्ययन केन्द्र, विक्रम विश्वविद्यालय के आभारी हैं जिन्होंने मार्गदर्शन किया। डॉ० आशुतोष पाठक ने इस शोधपत्र की तैयारी में परामर्श दिया जिसके लिये हम उनके भी आभारी हैं।

निर्देश

1. चौधरी, आर० एस०, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1976, 19, 169-177.

2. गुप्ता, डी० पी०, जर्न० मैथ० सोसा०, 1971, 4, 337-345.

3. आन्ज़ेश्काफ, एन०, युनिवर्सिटी डे सौफिया, 1936, 1, 39-133.

4. झेगो, जी०, *Orthogonal Polynomials*, कलोकियम पब्लि० अमे० मैथ० सोसायटी, न्यूयार्क संस्करण, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

वाराणसी के श्मशान घाटों के अवसाद का अध्ययन

सच्चिदानन्द सिंह तथा महाराज नारायण मेहरोत्रा
भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जून 30, 1990]

सारांश

वाराणसी के दो प्रमुख श्मशान घाटों—मणिकर्णिका घाट तथा हरिश्चन्द्र घाट—के अवसाद के अध्ययन से ज्ञात हुआ है कि यहाँ के अवसादों में भारी धातुओं का सांद्रण बढ़ रहा है। भारी धातुओं की मात्रा की तुलना औसत शेल मान से करने पर पाया गया कि हरिश्चन्द्र घाट क्षेत्र में कॉपर, कोबाल्ट तथा जिंक की अधिकता है तथा मणिकर्णिका घाट क्षेत्र में क्रोमियम, जिंक तथा यूरेनियम की मात्राएँ अपेक्षाकृत अधिक हैं। इन दोनों घाटों पर अन्य धातुओं—यथा लेड और निकेल की मात्रा कम है। यदि भौतिक-रासायनिक प्रक्रियाओं में परिवर्तन के फलस्वरूप ये धातुएँ जल में जायेंगी तो वह जल अधिक प्रदूषित हो जायेगा और मानव स्वास्थ्य के लिये हानिकारक होगा।

Abstract

The study of sediments of Varanasi-cremation ghats. *By* Sachidanand Singh and Maharaj Narain Mehrotra, Geology Department, Banaras Hindu University, Varanasi.

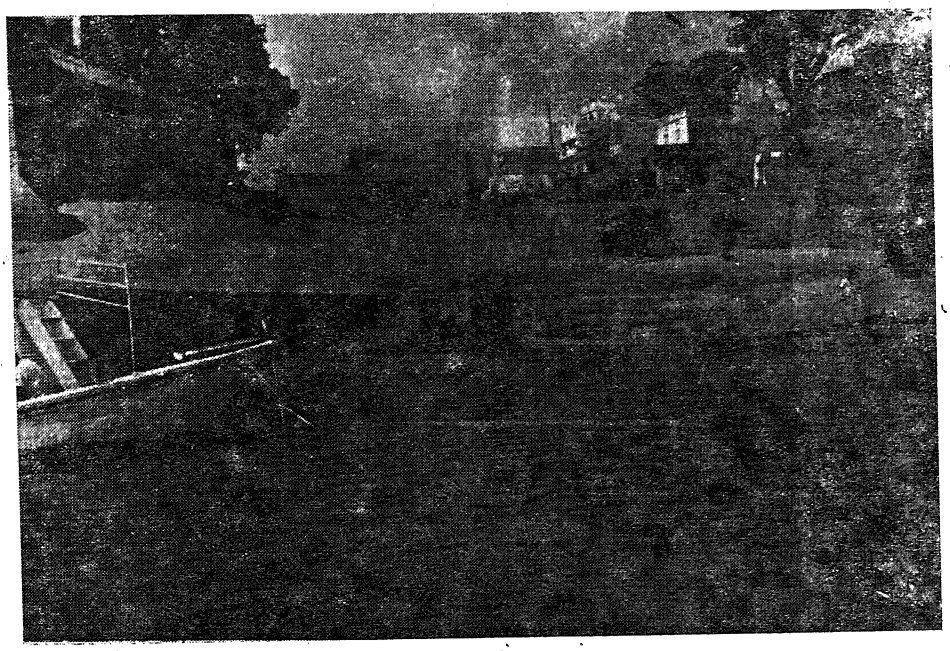
The study of sediments of the main cremation ghats of Varanasi—Harishchandra ghat and Manikarnika ghat revealed the concentration of heavy metals in them. The sediments of the Harishchandra ghat are richer in Cu, Co and Zn when compared with their average values in shale, while those of Manikarnika ghat contain more of Cr, Zn and U in comparison to those of average shale. The concentration of other metals viz. Pb and Ni are less than their corresponding values in average shale. Due to remobillization of the toxic metals from the sediments, water may be contaminated and thus cause health hazards.

हिन्दुओं में यह मान्यता है कि गंगा तट पर दाह-संस्कार करने से मनुष्य को मोक्ष की प्राप्ति होती है। विशेषकर वाराणसी में शरीर त्यागने से मनुष्य को मुक्ति मिलती है अतएव वाराणसी के सुदूर क्षेत्रों से भी शव लाकर यहाँ जलाये जाते हैं। वाराणसी गंगा के बाँयें तट पर बसा है। इसी तट पर यहाँ के प्रमुख श्मशान घाट हैं मणिकर्णिका घाट (चित्र 1) तथा हरिश्चन्द्र घाट (चित्र 2)। मणिकर्णिका घाट को "महाश्मशान" की संज्ञा दी गयी है। यहाँ शवदाह का क्रम निरन्तर चलता रहता है। यहाँ की राख कभी ठण्डी नहीं हो पाती। नगरमहापालिका, वाराणसी के अनुसार उपर्युक्त घाटों पर प्रतिमाह क्रमशः 1524 तथा 931 शवों को जलाया जाता है। इसका विस्तृत विवरण सारणी 1 में दिया गया है।

शवों के जलने से आस-पास के अवसादों में कार्बन की मात्रा बढ़ती है। साथ ही जलने से निकलनेवाले धुएँ में विद्यमान तत्व हवा में मिलते हैं जो वायु-मण्डलीय आर्द्रता के कारण भारी होकर अवसाद तथा जल में मिलते हैं। इसके अतिरिक्त अधजली लाशें तथा जल में प्रवाहित शव गन्दगी फैलाते हैं और क्षेत्र के अवसादों तथा जल को प्रदूषित करते हैं।



चित्र 1 : मणिकर्णिका घाट पर जलते शव—यह दाह क्रिया करने का प्रमुख श्मशान घाट है। जलती हुई लाश व उससे निकलता धुआँ स्पष्ट दिखाई पड़ रहा है। साथ ही अधजली लकड़ी तथा फूल भी जल के पास पड़े हुए हैं।



चित्र 2 : हरिश्चन्द्र घाट के निकट गन्दा नाला व विद्युत शवदाह-गृह के निर्माण का दृश्य ।

सारणी 1

वाराणसी में शवदाह का विवरण

(नगरमहापालिका, वाराणसी 1-1-1891 से 31-8-1989 तक)

	मणिकर्णिका घाट पर जलाये गये शव	हरिश्चन्द्र घाट पर जलाये गये शव
वाराणसी जिला		
(अ) देहाती क्षेत्र से	3796	3682
(ब) शहरी क्षेत्र से	2467	2194
अन्य जिलों से	5928	1574
योग	12191	7450

प्रयोगात्मक

क्षेत्रीय कार्य :

उपर्युक्त तथ्य को दृष्टिगत रखते हुए हरिश्चन्द्र घाट तथा मणिकर्णिका घाटों का सर्वेक्षण किया गया। सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि इन दोनों घाटों पर एक-एक गन्दा नाला भी नदी में मिलता है। हरिश्चन्द्र घाट के नाले द्वारा कमच्छा, भेलूपुर, सोनारपूरा आदि क्षेत्रों की गन्दगी गंगा में मिलती है। मणिकर्णिका घाट के नाले द्वारा अत्यधिक घना बसा चौक क्षेत्र की गन्दगी गंगा में आती है। यद्यपि हाल ही में हरिश्चन्द्र घाट पर विद्युत शवदाह-गृह का निर्माण हो गया है, तथापि अभी भी अधिकतर शव घाट पर ही जलाये जाते हैं।

अध्ययन हेतु हरिश्चन्द्र घाट और मणिकर्णिका घाट क्षेत्र तथा इनके विपरीत दाँये तट क्षेत्र से प्रतिदर्श एकत्र किये गये। ज्ञात हो कि कहीं-कहीं गंगा नदी पक्के घाट से इतनी सटी हुई बहती है कि तटीय अवसाद उपलब्ध नहीं हो पाते।

प्रयोगशाला कार्य :

एकत्र नमूनों से कुछ प्रतिनिधि नमूने चुने गये। उनको सुखाकर शंक्वन-चतुर्थांशन राशि से प्रतिनिधि मात्रा प्राप्त की गई तथा रेट्स स्वचालित मशीन से ए० एस० टी० एम० चलनी का उपयोग कर कण साइज़ विश्लेषण किया गया। चयनित नमूनों से (170-230 कण साइज़) ब्रोमोफार्म (आ० घ० 2.89) द्वारा भारी एवं हल्के खनिज पृथक कर स्लाइड बनाये गये। इन स्लाइडों का जापान निर्मित "निकान" ध्रुवण सूक्ष्मदर्शी (मॉडल नम्बर एफ एक्स-35 ए) द्वारा अध्ययन किया गया। अति-सूक्ष्म खनिजों के अध्ययन के लिये 1009 फिलिप्स एक्स-रे यूनिट प्रयोग में लायी गयी। कार्बोनेट की मात्रा के लिए म्यूलर एवं गास्टनर के 'कार्बोनेट बम' तथा जैविक पदार्थ के लिए वाकले तथा ब्लैक[3] की द्रुत अनुमापन विधि अपनायी गयी। लेश/भारी धातुओं की मात्रा परमाणवीय अवशोषण स्पेक्ट्रममिति (आई० एल० जैरेल ऐश मॉडल एस-11) से ज्ञात की गयी।

कण साइज व्यवहार :

सारणी 2 में अध्ययन क्षेत्र तथा इनके विपरीत दाँये तट से चयनित प्रतिनिधि प्रतिदर्शों का कण साइज़ वंटन प्रस्तुत है। उपलब्ध आंकड़ों से बारम्बारता वक्र खीचें गये। इन बारम्बारता वक्र से स्पष्ट है कि अधिकतर वक्रों का मुख्य बहुलक सूक्ष्म तथा अतिसूक्ष्म कण साइज़ क्षेत्र में हैं। हरिश्चन्द्र घाट तथा मणिकर्णिका घाट पर वक्र का स्वभाव द्विबहुलक है तथा इनका मुख्य बहुलक 3.7.5% अर्थात् अतिसूक्ष्म कण साइज में है। हरिश्चन्द्र घाट-विपरीत पर वक्र का स्वभाव एकबहुलक है एवं मुख्य बहुलक 4.25% अर्थात् गाद+मृत्तिका में तथा मणिकर्णिका घाट-विपरीत पर स्वभाव बहुबहुलक और मुख्य बहुलक 2ϕ अर्थात् सूक्ष्म कण साइज़ में है।

एक बहुलक स्वभाव का प्रमुख कारण स्थानीय प्रवरण प्रतीत होता है। द्वि-बहुलक तथा बहुबहुलक स्वभाव नदी के वेग परिवर्तन एवं उपर्युक्त नालों द्वारा लाये गये भिन्न कण साइज़ों के कारण सम्भव है।

खनिज अध्ययन :

स्लाइडों के सूक्ष्मदर्शी अध्ययन द्वारा हल्के एवं भारी खनिज पहचाने गये। हल्के खनिजों में क्वार्ट्ज़, कैल्सपार, अभ्रक तथा शैलखण्डों की बहुलता है। इनमें क्वार्ट्ज़ की मात्रा 70 से 80% तक हैं। क्वार्ट्ज़ के दो प्रकार-एकक क्रिस्टलीय व बहुक्रिस्टलीय पहचाने गये। फेल्सपार के अन्तर्गत आर्थोक्लेज़, माइक्रोक्लीन तथा प्लेजिओक्लेस तथा अभ्रक-मस्कोवाइट एवं बायोटाइट ज्ञात हुए। शैल खण्ड में ग्रेनाइट, नाइस, बालुकाश्म, शिस्ट, फाइलाइट, क्वार्ट्ज़ाइट एवं चूनाश्म पहचाने गये।

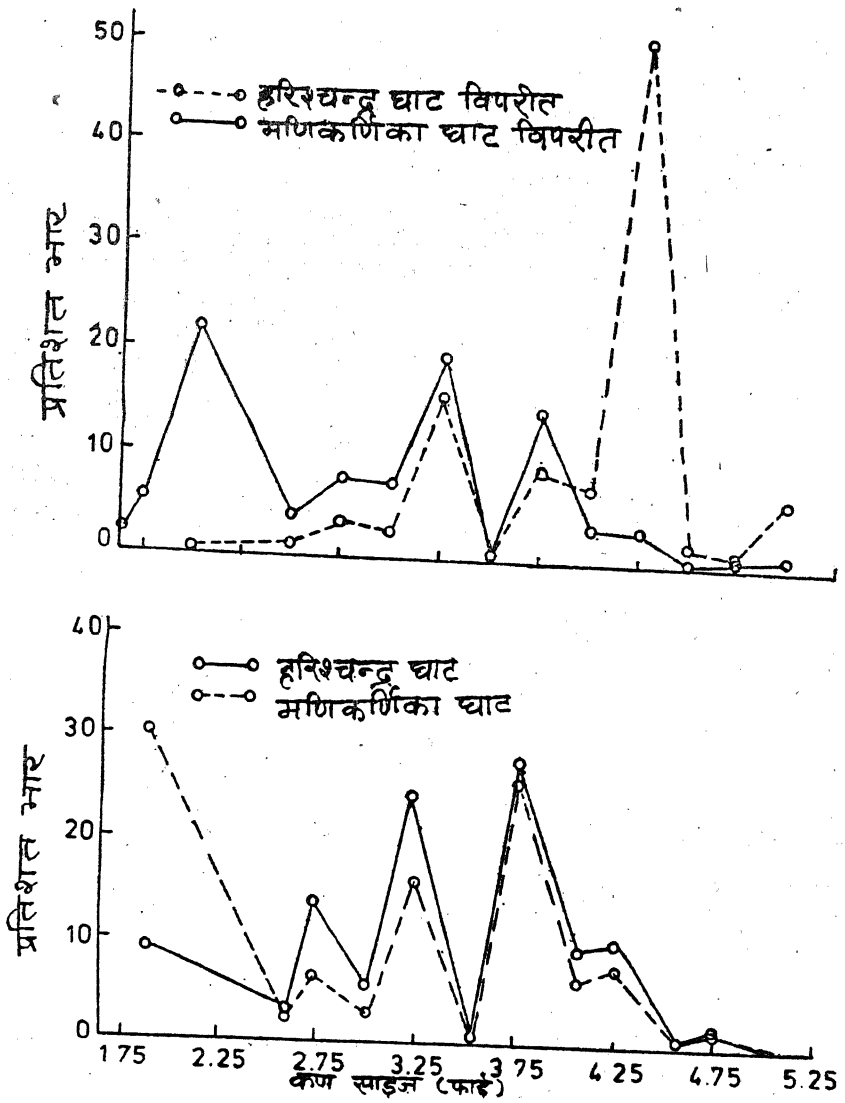
सारणी 2

कण साइज़ बारम्बारता बंटन (प्रतिशत भार)

क्र० सं०	मेश (जाली) संख्या	मि०मी०	ϕ	हरिश्चन्द्र-घाट	मणिकर्णिका घाट	हरिश्चन्द्र-घाट विपरीत	मणिकार्णिका घाट विपरीत
1	40	0.420	1.5	—	2.050	—	1.732
1	50	0.297	1.75	2.125	7.550	—	5.289
3	60	0.25	2.0	5.212	20.665	0.605	22.479
4	80	0.18	2.5	1.220	1.215	0.853	3.090
5	100	0.15	2.75	12.490	6.370	3.334	7.690
6	120	0.125	3.00	5.206	2.870	2.386	7.300
7	140	0.106	3.25	25.102	16.155	15.603	20.162
8	170	0.09	3.5	0.067	0.45	0.100	0.050
9	200	0.075	3.75	27.097	25.007	8.752	15.402
10	230	0.063	4.0	9.266	7.394	7.293	3.885
11	270	0.053	4.25	10.256	8.710	51.920	3.780
12	325	0.045	4.50	0.581	0.629	1.683	0.236
13	400	0.038	4.75	0.960	0.832	1.920	3.273
14	400	<0.038	>4.75	0.201	0.334	5.197	0.352

भारी खनिजों में गार्नेट, जरकॉन, हार्नब्लेन्ड, स्टॉरोलाइट, ऐपाटाइट, टूरमैलीन, रूटाइल, एपिडोट कायनाइट, सिलीमेनाइट, हाइपरस्थीन, मैग्नेटाइट, इल्मेनाइट तथा हेमाटाइट पहचाने गये हैं।

एक्स-किरण विश्लेषण से ज्ञात हुआ कि सभी में क्वार्ट्ज़ मुख्य घटक है तथा फैल्सपार और अभ्रक पर्याप्त मात्रा में विद्यमान है। इनके अतिरिक्त कैल्साइट, डोलोमाइट, क्लोराइट, हार्नब्लैन्ड की निम्न अथवा लेश मात्राएँ ज्ञात हुई हैं। उपर्युक्त खनिजों में क्वार्ट्ज़, फेल्सपार-आर्थोक्लेज, माइक्रोक्लीन तथा प्लेजिओक्लेस, अभ्रक-मस्कोवाइट तथा बायोटाइट एवं हार्नब्लेण्ड खनिज सूक्ष्मदर्शी द्वारा भी पहचाने गये हैं। क्लोराइट यथासम्भव हार्नब्लेण्ड और बायोटाइट के परिवर्तन के फलस्वरूप निर्मित हुआ है। कैल्साइट और डोलोमाइट खनिज चूनाश्म शैलखण्डों के प्रतीक हैं।



नसूनों से मृत्तिका अंश पृथक करके उनका एक्स-किरण विश्लेषण किया गया। इस नमूनों में मृत्तिका की मात्रा 16 प्रतिशत तक है।

इनमें मुख्य घटक क्वार्ट्ज के अतिरिक्त मॉन्टमॉरिलोनाइट, इलाइट, केओलिनाइट प्रमुख हैं। इनके अतिरिक्त लेश मात्राओं में हेमाटाइट, रूटाइल, गोऐथाइट भी विद्यमान हैं।

लेश/भारी धातुएँ :

भारी धातुओं के अन्तर्गत कॉपर, लेड जिंक निकैल, कोबाल्ट, क्रोमियम यूरेनियम आदि की मात्राएँ ऊपर वर्णित विधि से ज्ञात की गयीं। मरकरी की लेश मात्राएँ शीत वाष्प विधि द्वारा प्राप्त की

सारणी 3

वाराणसी (गंगा) के श्मशान घाटों के अवसाद में भारी धातुओं की मात्रा

(सभी धातुओं के मान पी० पी० एम० (ppm) में हैं केवल Hg का मान पी० पी० बी ppb में)

भारी धातुएँ	हरिश्चन्द्र घाट निकट	हरिश्चन्द्र घाट	मणिकर्णिका घाट	हरिश्चन्द्र घाट विपरीत	मणिकर्णिका घाट विपरीत	शेल मान
Cu	40	82	30	<10	10	45
Pb	10	<10	<10	<10	<10	20
Ni	20	38	51	20	10	68
Co	10	26	10	<10	<10	19
Cr	70	46	96	30	15	90
Zn	ND	120	94	ND	63	95
U	ND	3.7	4.8	ND	3.8	3.7
V	30	ND	ND	25	<10	130
Y	60	ND	ND	20	ND	—
B	450	ND	ND	750	150	580
Sc	<10	ND	ND	10	ND	—
Hg	250	ND	ND	70	140	400
जैविक पदार्थ (%)	ND	0.164	ND	ND	ND	—
कार्बोनेट (%)	ND	8	18	ND	7.0	—

ND=अज्ञात

गयीं। परिणाम सारणी 3 में अंकित हैं। इनमें जैविक पदार्थ तथा कार्बोनेट की प्रतिशत मात्रा भी दर्शायी गयी है। इस सारणी के अंतिम स्तम्भ में औसत शेल में विद्यमान लेश तत्वों की मात्रा दर्शायी गयी है (टुरेकियन तथा वेटेपाल[1] तथा इन्हीं मानों से क्षेत्र के अवसाद में विद्यमान भारी धातुओं की मात्रा की तुलना की गयी है। यह इंगित करना आवश्यक है कि तुलनात्मक अध्ययन के लिए अन्य कोई आधार यथा गंगा अवसाद में भारी धातुओं की विद्यमानता का कोई मूल आँकड़ा उपलब्ध नहीं है।

विवेचना

औसत शेल में विद्यमान भारी धातुओं के लिए दिये गये मानों में तुलना करने पर ज्ञात होता है कि हरिश्चन्द्र घाट तथा मणिकार्णिका घाट क्षेत्र का अवसाद अपेक्षाकृत प्रदूषित है जबकि इनके विपरीत घाटों पर धातुओं का सांद्रण कम है।

अवसाद में धातुओं का सांद्रण कई बातों पर निर्भर करता है—यथा अवसाद की स्थिति अर्थात् अवसाद के नमूनों की नालों से दूरी, अवसाद का कण साइज़, उनमें विद्यमान खनिज़, जैविक/कार्बनिक पदार्थ और कार्बोनेट की मात्रा।

हरिश्चन्द्र घाट क्षेत्र में तीन धातुओं, कॉपर, कोबाल्ट तथा जिंक की मात्राएँ क्रमशः 82, 26 तथा 120 पी० पी० एम० हैं जो औसत शेल मान से अपेक्षाकृत अधिक हैं। अन्य धातुओं, यथा लेड, निकेल, क्रोमियम यूरेनियम आदि की मात्रा औसत शेल मान से कम है। यहाँ के अवसाद में जैविक पदार्थ 0·164% कार्बोनेट 7% तथा मृतिका खनिज 16% विद्यमान है।

मणिकर्णिका घाट क्षेत्र में क्रोमियम, जिंक तथा यूरेनियम की मात्रा क्रमशः 96, 94 तथा 4.8 पी० पी० एम० है जो औसत शोलमान से अधिक है। यहाँ कॉपर, लेड, निकेल, कोबाल्ट आदि की मात्रा औसत शेल मान से कम है। इस घाट के निकट भी एक गंदा नाला गंगा में मिलता है तथा यहाँ के अवसाद में भी कार्बोनेट की मात्रा 18प्रतिशत है।

उपर्युक्त विवेचना से स्पष्ट है कि हरिश्चन्द्र घाट तथा मणिकर्णिका घाट क्षेत्र के अवसाद में धातुओं का सांद्रण बढ़ रहा है। ये भारी धातुएँ विभिन्न भौतिक रासायनिक प्रक्रियाओं के परिणामस्वरूप अवसाद से जल में जा सकती हैं। जल में इन धातुओं की मात्रा देहली-मान से अधिक होने पर वह आविषालु हो जाता है जो मानव के स्वास्थ्य पर दुष्भाव डालता है और कभी-कभी घातक भी हो सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध-प्रपत्र का कार्य पर्यावरण विभाग, भारत सरकार की एक परियोजना के अन्तर्गत किया गया। इसके अन्तर्गत वित्तीय सहायता के अतिरिक्त क्षेत्र सर्वेक्षण आदि की भी सहायता उपलब्ध की गयी। अतः भारत सरकार के प्रति हम हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करते हैं।

निर्देश

1. दुरेकियन, के० के० तथा वेडेपाल, के० एच०, **बुल० जिआल० सोसा० अमें०**, 1961, **72**, 175-182

2. म्युलर, जी० तथा गास्टनर, एम०, **एन०, जैएल मिनर० एम० एच० जेजी०**, 1971, **10**, 466-469

3. वाकले, ए० तथा ब्लैक, डी० सी०, **सायल साइन्स**, 1934, **37**, 29-38

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

कचरी का शाखा तन्त्र एवं सरबो बया द्वारा नीड सौन्दर्यकरण

सतीश कुमार शर्मा

विश्व वानिकी वृक्ष उद्यान, झालाना डूँगरी, जयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—जुलाई, 1990]

सारांश

मानसून के प्रारम्भ में कचरी के प्ररोहों पर नर पुष्प ही पैदा होते हैं परन्तु जैसे-जैसे मानसून उतार की ओर बढ़ता है, मादा पुष्प भी पैदा होना प्रारम्भ होते हैं परन्तु सरबो बया केवल नर पुष्पों को तोड़कर ही अपने घोंसलों में सजाता है।

Abstract

Branching system of *cucumis melo* **var** *agrestis* **and nest beautification by black-throated weaver bird** (*Ploceus benghalensis*). *By* Satish Kumar Sharma, World Forestry Arboretum, Jhalana Dungri, Jaipur (Rajasthan).

During ascending monsoon, only staminate flowers develop on different trails of *Cucumis melo* var. *agrestis*, but as it descends, pistillate flowers also appear simultaneously but blackthroated weaver bird (*Ploceus benghalensis*) selectively implants staminate flowers in its nest for beautification.

सरबो बया (*Ploceus benghalensis*) अपने घोंसलों को सजाने हेतु प्रायः[1] पीले रंग के फूलों का उपयोग करता है। इस पक्षी की इस विशेषता का अध्ययन अम्बेडकर, अली तथा रिप्ले,[2], मिस्त्री[3], शर्मा[4–6] आदि द्वारा किया जा चुका है। संभवतः मादाओं को रिझाने हेतु घोंसलों में पीले रंग के फूल सजाये जाते हैं।

सरबो बया कद्दू कुल (Family Cucurbitaceae) के कई प्रजातियों के पौधों के पीले रंग के पुष्प नीड सौन्दर्यकरण हुतु चुनता है जो प्रायः नर पुष्प होते हैं। ये पुष्प या तो ताजा ही पौधे से तोड़े जाते हैं या हाल ही में नीचे गिरे पुष्पों को प्रयोग में लाया जाता है। बिना खिले, मुर्झाये तथा कई दिनों

के झड़े फूलों को प्रयोग में नहीं लाया जाता। फूल तोड़ने या उठाने से लेकर, परिवहन तथा घोंसलों में सजाने तक का सारा काम चोंच द्वारा किया जाता है। एक बार में एक फूल ही ले जाते हुये पक्षी को देखा गया है। पुष्प सजाने का सारा उपक्रम नर सरबो बया ही करता है।

कचरी (*Cucumis melo* var *agrestis*) कद्दू कुल का एक आरोही, जंगली, मानसूनी पौधा है जिसके नर पुष्पों को सरबो बया नीड सौन्दर्यकरण में प्रयुक्त करता है। प्रस्तुत प्रपत्र में कचरी के विशिष्ट शाखा तन्त्र तथा सरबो बया द्वारा नीड सौन्दर्यकरण का विवेचन किया गया है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन स्थल

प्रस्तुत अध्ययन पूर्वी राजस्थान के अलवर, भरतपुर तथा जयपुर जिले एवं दक्षिणी राजस्थान के उदयपुर जिले में वर्ष 1988 में किया गया। प्रायोगिक कार्य विश्व वानिकी वृक्ष उद्यान, जयपुर की पौध-शाला में किया गया है।

अध्ययन प्रक्रिया

जुलाई से सितम्बर तक मानसून का शुभारम्भ, मध्य तथा अन्त में अलग-अलग जिलों में अलग-अलग स्थानों पर कचरी के पौधों की मुख्य शाखा तथा अन्य शाखाओं की उत्पत्ति, लम्बाई, उन पर लगे पत्ते व फूलों के लिंगवार सांख्यिकी सम्बन्धी प्रेक्षण फील्ड फाइल में दर्ज किये गये। इन प्रेक्षणों की पुष्टि वर्ष 1988 में पौधशाला में गमलों में कचरी के पौधे उगाकर की गई। मानसून काल में ही सरबो बया के घोसलों, विशेषकर अधूरे घोसलों का अवलोकन किया गया तथा उनमें सौन्दर्यकरण हेतु लगाये गये कचरी के फूलों के लिंग, रंग, साइज, लगाने के प्रकार आदि से संबंधित प्रेक्षण किये गये।

सरबो बया द्वारा कचरी के फूलों का नीड सौन्दर्यकरण में उपयोग

अध्ययन के दौरान पाया गया कि नर सरबो बया अपने अधूरे घोसलों में अण्ड-कक्ष की आन्तरिक दीवार पर प्रायः गीले गोबर या मानव मल या दोनों का निक्षेप करता है तथा इस निक्षेप पर कचरी के ताजा नर फूल लगाता है। पुष्प सजाने के कुछ समय बाद शुष्कन के कारण फूल मुर्झाना प्रारम्भ करते हैं तथा उनके दलपुंज (Corolla) अन्दर की तरफ सिमटना शुरू करते हैं। यदि हवा में आपेक्षिक आर्द्रता की कमी हो तो पुष्प अपेक्षाकृत तेजी से मुर्झाते हैं। यद्यपि नम गोबर तथा मल का उपयोग कर बया कृत्रिम रूप से आर्द्रता बढ़ाने का प्रयास करता है तथापि सुबह सजाये गये पुष्प दोपहर बाद सिकुड़ चुके होते हैं। चूंकि फूलों के दल अन्दर की ओर सिकुड़ते हैं जिससे दलों की अन्दर की गहरी पीली सतह छुप जाती है तथा उनकी सफेदी लिये हल्के पीले रंग की बाहरी सतह आने लगती है। इस प्रकार घोंसले में फूलों की सजावट कम आकर्षक हो जाती है। घोंसलों को जीवन्त बनाये रखने हेतु पुनः पुनः निक्षेप तथा सजावट की जाती है। ऐसा तब तक किया जाता है जब तक कि कोई मादा अधूरे घोंसले को पसन्द नहीं कर लेती।

---

*वर्ष 1988 में मानसून सामान्य था।

उपरोक्त विवरण से एक प्रश्न सहज ही उठता है कि सरबो बया कचरी के नर फूल ही घोंसले में क्यों सजाता है ? इस प्रश्न का उत्तर पाने हेतु कचरी के शाखा तन्त्र (Branching System) तथा पुष्पों की सांख्यिकी का अध्ययन करना आवश्यक है ।

कचरों का शाखा तन्त्र तथा पुष्पों की सांख्यिकी

कचरी उभयलिंगाश्रयी (Monoecious) सानसूनी पौधा है जिसके बीज मानसून पूर्व की बौछारों के बाद उगना प्रारम्भ हो जाते हैं । उपरिभूमिक अंकुरण (Epigeal germination) के बाद प्रांकुर तेजी से बेल (लतर) के रूप में धरती पर पड़ा हुआ बढ़ता है या अपने प्रतानों (Tendrils) की मदद से उपलब्ध आधार पर चढ़ता है । प्रांकुर से विकसित इस प्रथम शाखा को प्राथमिक प्ररोह (Primary Trail) कहना उचित होगा । इस प्ररोह पर केवल नर पुष्प (Staminate flowers) ही पैदा होते हैं । कुछ निचली पत्तियों को छोड़कर बाद की सभी पत्तियों के कक्ष में नर पुष्प कक्षीय गुच्छक (Axilary Fascicles) रूप में लिखते हैं । पुष्पावली वृन्त (Peduncle) पर लगे नीचे के पुष्प बड़े होते हैं तथा पहले खिलते हैं । पुष्पन क्रमशः नीचे से ऊपर की तरफ बढ़ता है । खिल चुके पुष्पों के झड़ने से उनके पुष्प-वृन्तों (Pedicels) के ठूँठ ही पुष्पावली-वृन्त पर नजर आते हैं । इन वृन्त-ठूँठों को गिनकर यह अनुमान लगाया जा सकता है कि कितने नर पुष्प अब तक खिल चुके हैं ।

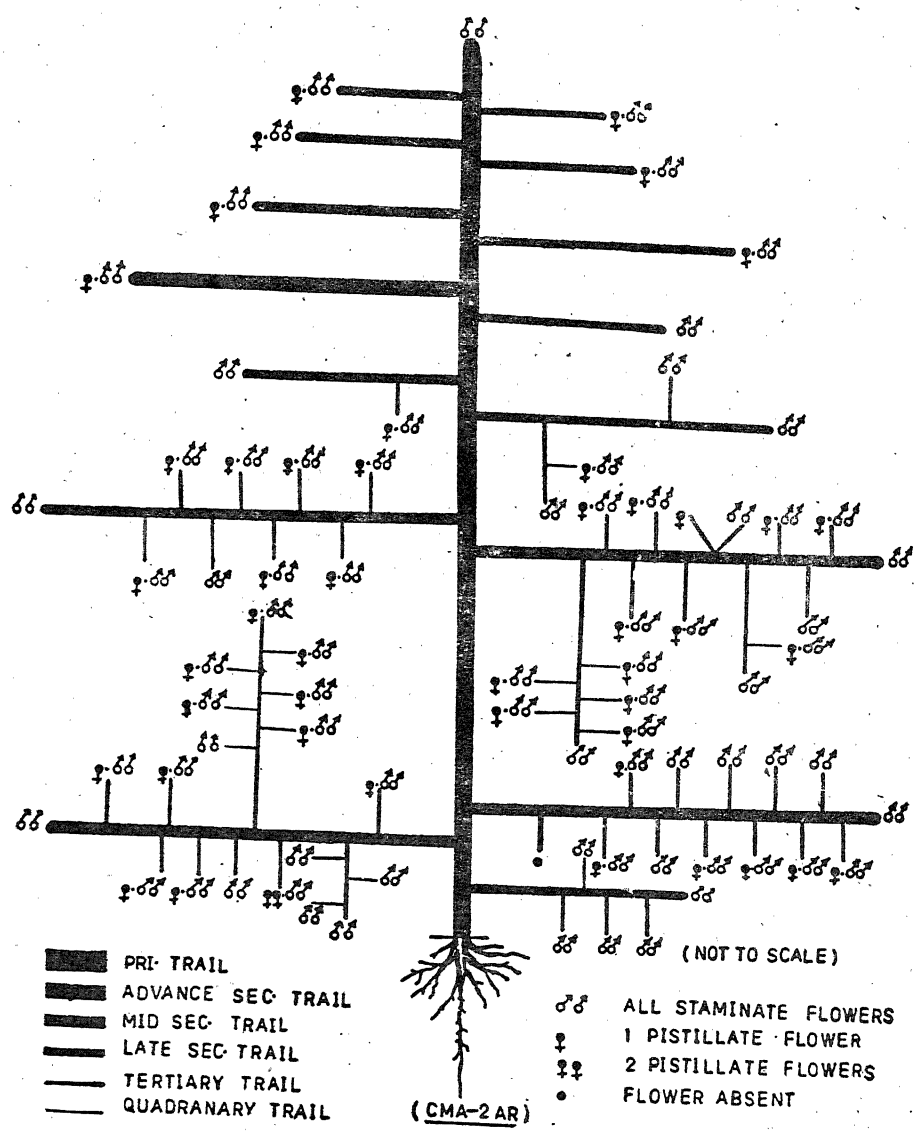
कुछ सप्ताह बाद प्राथमिक प्ररोह की निचली पत्तियों की कक्षा से द्वितीयक प्ररोह (Secondary Trails) निकलने लगते हैं । द्वितीयक प्ररोहों पर प्रायः नर पुष्प खिलते हैं या कुछ पर नर तथा कुछ पर मादा पुष्प खिलते हैं । अध्ययन के दौरान देखा गया है कि द्वितीयक प्ररोहों पर पुष्पों का लिंग निर्धारण मानसून द्वारा प्रभावित प्रतीत होता है । मानसून के सापेक्ष में द्वितीयक प्ररोह तीन तरह के होते हैं ।

(1) **अग्रिम द्वितीयक प्ररोह** (Advance Secondary Trails) : ये मानसून के प्रारम्भिक दौर में ही उत्पन्न हो जाते हैं तथा मानसून की समाप्ति तक काफी लम्बाई तक वृद्धि कर लेते हैं । ये प्रकृति में प्राथमिक प्ररोह जैसे ही होते हैं तथा इन पर नर पुष्प ही लगते हैं ।

(2) **मध्य द्वितीयक प्ररोह** (Mid Secondary Trails) : ये मानसून काल के लगभग मध्य में पैदा होते हैं । इन प्ररोहों की अधिकांश पत्तियों के कक्ष में नर तथा कुछ के कक्ष में मादा पुष्प (Pistillate) पैदा होते हैं । मादा पुष्प एकल कक्षीय (Solitary-axilary) रूप से पैदा होते हैं ।

(3) **लम्बित द्वितीयक प्ररोह** (Late Secondary Trails) : ये मानसून की समाप्ति के समय पैदा होते हैं । इन प्ररोहों पर मध्य द्वितीयक प्ररोहों की तरह ही दोनों लिंगों के पुष्प पैदा होते हैं परन्तु मादा पुष्प प्रायः अधिक संख्या में होते हैं । कई बार तो इन प्ररोहों पर समस्त पुष्प मादा ही होते हैं तथा कोई नर पुष्प (Staminate flowers) नहीं होता (चित्र 1) ।

इस प्रकार यह स्पष्ट होता है कि अग्रिम द्वितीयक प्ररोह से लम्बित द्वितीयक प्ररोहों की ओर प्ररोहों में क्रमशः पुरुषत्व घटता है तथा स्त्रीत्व बढ़ता है ।



चित्र 1

जैसे-जैसे मानसून समाप्ति की तरफ बढ़ता है द्वितीयक प्ररोहों से तृतीयक प्ररोह (Tertiary trials) पैदा होते हैं तथा तृतीयक प्ररोहों से चतुर्थक प्ररोह (Quadranary trails) भी पैदा होते हैं। ये तीसरे तथा चौथे चक्र की शाखायें प्रायः लम्बाई में छोटी होती है तथा इन पर या तो दोनों लिंगों के पुष्प उत्पन्न होते हैं या केवल मादा पुष्प ही लगते हैं। मानसून के प्रारम्भ में जहाँ 100% पुष्प नर होते हैं वहीं जैसे-जैसे मानसून समाप्ति की ओर बढ़ता है, मादा पुष्पों की प्रतिशतता बढ़ती जाती है। ऐसा

प्रतीत होता है मानसून का उतार कचरी के प्ररोहों में स्त्रीकरण (Faminizing) बढ़ाता है। मानसून के परिप्रेक्ष्य में प्ररोहों की लैंगिक समानता निम्नवत् होती है—

प्राथमिक प्ररोह	≃	अग्रिम द्वितीयक प्ररोह
लम्बित द्वितीयक प्ररोह	≃	अग्रिम तृतीयक प्ररोह
लम्बित तृतीयक प्ररोह	≃	अग्रिम चतुर्थक प्ररोह

सारणी 1

कचरी में विभिन्न प्ररोहों की लैंगिकता

पौधे का कूट क्रमांक	प्ररोह का प्रकार	प्ररोह के उत्पन्न होने की तिथि अवधि	उत्पन्न कुल प्ररोह	प्ररोहों की संख्या जिन पर सभी पुष्प नर थे	सभी पुष्प मादा थे	दोनों लिंगों के पुष्प थे	कोई पुष्प नहीं था
CMA—1AR	प्राथमिक प्ररोह	15.7.88	1	1	—	—	—
	द्वितीयक प्ररोह	10.8.88 से 16.8.88	3	1	—	2	—
	तृतीयक प्ररोह	18.8.88	2	—	—	2	—
	चतुर्थक प्ररोह	31.8.88 से 4.9.88	3	—	3	—	—
CMA—2AR	प्राथमिक प्ररोह	15.7.88	1	1	—	—	—
	अग्रिम द्वितीयक प्ररोह	7.8.88 से 18.8.88	4	4	—	—	—
	मध्य द्वितीयक प्ररोह	12.8.88 से 31.8.88	1	—	—	1	—
	लम्बित द्वितीयक प्ररोह	31.8.88 से 7.9.88	10	4	—	6	—
	तृतीयक प्ररोह	20.8.88 से 7.9.88	47	18	1	27	1
	चतुर्थक प्ररोह	27.8.88 से 7.9.88	16	4	—	12	—
	योग		88	33	4	50	1
	%			37.5	4.54	56.8	1.13

प्राकृतिक रूप से उगे कचरी के पौधों में पुष्पीकरण की प्रवृत्ति का अध्ययन अलवर, भरतपुर, जयपुर तथा अलवर जिलों में किया गया। प्राकृतिक पौधों से प्राप्त परिणामों की सत्यता की जाँच हुतु कचरी के प्ररोहों का अध्ययन विश्व वानिकी वृक्ष उद्यान, जयपुर में किया गया। इस हेतु कचरी के कुछ बीज गमलों में उगाये गये जिनमें से 2 पौधे CMA—1AR तथा CMA—2AR का चयन अध्ययन हेतु किया गया एवं उनके एक-एक फूल का प्ररोहवार रेकार्ड, पौधे की मृत्यु पर्यन्त रखा गया। इन दोनों पौधों पर कुल 88 प्ररोह उत्पन्न हुये। प्ररोह एवं पुष्प संबंधी सांख्यिकी का विवरण सारणी 1 से 4 तक दिया गया है।

सारणी 2

कचरी के प्ररोहों पर लिंगवार पुष्पों की उपलब्धता

निरीक्षक की अंतिम तिथि	पौधे का कूट क्रमांक	प्ररोहों की संख्या	समस्त प्ररोहों की कुल लम्बाई (मि०मी०)	निरीक्षण की अंतिम तिथि तक खिल चुके, खिल रहे, बिना खिले (कलिका) पुष्पों की संख्या	
				नर	मादा
13—9—88	CMA—1AR	9	3295	361	10
13—9—88	CMA—2AR	79	18000	1483	48
योग		88	21295	1844	58
अनुपात				31.7	1.0

विवेचना

सारणी 1, 2, 3 तथा 4 के अध्ययन से निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं :

1. प्रायोगिक दो पौधों पर उत्पन्न कुल 88 प्ररोहों में से 83 प्ररोह ऐसे थे जिन पर नर पुष्प उपस्थित थे जबकि केवल 54 ऐसे थे जिन पर मादा पुष्प थे। दूसरे शब्दों में, नर पुष्प धारण करने वाले प्ररोहों की संख्या हमेशा अधिक होती है। यही नहीं, नर पुष्प मादा पुष्पों की तुलना में लगभग 31 गुणा ज्यादा पैदा होते हैं तथा एक नियत समय पर मादा पुष्पों की तुलना में नर पुष्प लगभग 25 गुणा ज्यादा खिली अवस्था में मिलते हैं। नर पुष्पों की उत्पादन दर लगभग 5 पुष्प प्रति कक्ष हैं जबकि मादा पुष्पों की एक पुष्प प्रति कक्ष है। दूसरे शब्दों में, नर पुष्पों की उपलब्धता तुलनात्मक रूप से अधिक सहज होती है अतः नर सरबो बया नीड सौन्दर्यकरण हेतु इन्हें ही प्राप्त करता है।

2. नर पुष्प प्रारम्भ से ही पैदा होने लग जाते हैं जबकि मादा पुष्प कुछ समय बाद खिलना प्रारम्भ करते हैं। चूँकि नर सरबो बया मानसून के आरम्भ से ही अधूरे घोंसलों में फूल सजाना

प्रारम्भ कर देते हैं लेकिन उस समय कचरी पर मादा पुष्प उपलब्ध ही नहीं होते हैं अतः वह प्राप्य नर फूलों को ही चुनता है।

सारणी 3

कूट क्रमांक CMA—1AR के विभिन्न प्ररोहों पर पत्तियों की कक्षा में खिले पुष्पों का विवरण[2]

प्ररोहों का प्रकार	प्ररोहों की संख्या	प्ररोहों की कुल लम्बाई (मि०मी०)	कुल पत्तियों की संख्या	पुष्प रहित कक्षा वाली पत्तियों की संख्या	पुष्पित कक्षा वाली पत्तियों की संख्या						
					नर पुष्प युक्त पत्तियाँ	नर पुष्प युक्त पुष्प	मादा पुष्प युक्त पत्तियाँ	मादा पुष्प युक्त पुष्प	नर व मादा[1] पुष्प युक्त पत्तियाँ	नर व मादा[1] पुष्प युक्त पुष्प नर	नर व मादा[1] पुष्प युक्त पुष्प मादा
प्राथमिक प्ररोह	1	945	24	4	20	148	—	—	—	—	—
द्वितीयक प्ररोह	3	1750	40	—	45	187	3	3	1	1	1
तृतीयक प्ररोह	2	470	14	—	9	25	3	3	—	—	—
चतुर्थक प्ररोह	3	130	3	—	—	—	3	3	—	—	—
योग	9	3295	90	4	74	360	9	9	1	1	1

नर पुष्प 4.9 पुष्प प्रतिकक्ष मादा पुष्प 1.0 प्रतिकक्ष

1. आसाधारण रूप से एक पत्ती की कक्षा में एक नर तथा एक मादा पुष्प पास-पास निकले हुये पाये गये।

2. प्रेक्षण दिनांक 15.7.88 से 13.9.88 तक लिये गये।

नर व मादा पुष्पों के वृन्तों की सापेक्ष लम्बाई भी संभवतः चयन का आधार है। मादा पुष्पों के वृन्तों की लम्बाई तुलनात्मक रूप से नर पुष्पों के वृन्तों से कम होती है। यही नहीं, मादा पुष्पों में अधोवर्ती अण्डाशय (Inferior Ovary) की उपस्थिति के कारण पक्षी सम्भवतः पुष्प वृत्त की चोंच से पकड़ने में कुछ असुविधा अनुभव करता है जबकि नर पुष्पों के वृन्त पर ऐसी कोई रचना न होने से पक्षी आसानी से इसे पकड़कर तोड़ सकता है। नर पुष्पों में वृन्त की लम्बाई अधिक होने के कारण कम बल प्रयुक्त करके ही वृन्त को तोड़ा जा सकता है।

सारणी 4

दैनिक खिलने वाले नर तथा मादा पुष्पों का अनुपात

प्रेक्षण तिथि	पौध क्रमांक	कुल प्ररोह	प्रेक्षण तिथि को खिले फूलों की 10 बजे प्रातः संख्या	
			नर पुष्प	मादा पुष्प
6.8.90	1	8	4	0
6.8.90	2	4	2	0
6.8.90	3	1	1	0
6.8.90	4	3	0	2
6.8.90	5	2	5	0
6.8.90	6	1	2	0
6.8.90	7	2	2	0
6.8.90	8	4	4	0
6.8.90	9	7	12	2
6.8.90	10	6	6	1
6.8.90	11	1	0	0
23.8.90	12	11	13	0
4.9.90	13 (CmA-1AR)	9	12	0
13.9.90	14 (CMA-2AR)	79	267	8
योग		138	330	13
अनुपात			25.3	1.0
प्रतिशत			96.2	3.7

क्रमांक 1 से 12 तक के पौधे विभिन्न स्थानों से संग्रह किये गये थे।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक राजस्थान विश्वविद्यालय जयपुर के वनस्पति विज्ञान विभाग से डा० शिव शर्मा, डा० प्रभाकर जोशी, डा० कुन्दन कुमार शर्मा का आभारी है जिनकी प्रेरणा एवं मार्गदर्शन से उक्त अध्ययन संभव हो पाया है।

निर्देश

1. अम्बेदकर वी० सी०, *J. Bombay Nat. Hist. Soc.* 1972, **69(2)**, 268-82.

2. अली, एस० तथा रिप्ले, एस० डी०, Handbook of birds of India and Pakistan, (compact edition—Oxford University Press) 1983.

3. मिस्त्री, एस०, *J. Bombay nat. Hist. Soc.*, 1985, **85** (2), 432-34.

4. शर्मा, सतीश कुमार, *J. Bombay nat. Hist. Soc.*, 1985, **82(3)**, 1661-64.

5. वही, *J. Bombay nat. Hist. Soc.*, 1986, 83 (supp.), 1214-16

6. वही, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1986, **29(1)**, 149-53.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 3, 1990

संयुग्मी फूरियर श्रेणी द्वारा संतत फलनों के एक वर्ग की सन्निकटन मात्रा

टीकम सिंह

शासकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन (म०प्र०)

तथा

बी० पी० रघुवंशी

शासकीय पालीटेकनिक, उज्जैन (म०प्र०)

सारांश

[प्राप्त—दिसम्बर 12, 1989]

एक फलन की सन्निकटन मात्रा पर एक प्रमेय की स्थापना संतत रीज रूपान्तरों का प्रयोग करते हुए उसकी संयुग्मी श्रेणी द्वारा की गई है ।

Abstract

A note on the degree of approximation to a class of continuous functions by conjugate Fourier series. *By* Tikam Singh, Government Engineering College, Ujjain and B. P. Raghuwanshi, Government Polytechnic, Ujjain (M.P.).

A theorem on the degree of approximation to a funtion by its conjugate series using discrete Riesz transforms is established when $f \in \text{lip}\ (\alpha, p)$.

1. माना कि $f \in L[0, 2\pi]$ की फूरियर श्रेणी को

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos Kx + b_k \sin Kx) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \tag{1.1}$$

के द्वारा और (1.1) की संयुग्मी श्रेणी को

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin Kx - b_k \cos Kx) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) \tag{1.2}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। हम श्रेणी (1.1) तथा (1.2) के आंशिक योगों को क्रमशः $S_n(x)$ तथा $\tilde{S}_n(x)$ द्वारा अंकित करेंगे। माना कि

$$\tilde{f}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot t/2\,dt$$

जहाँ

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t).$$

माना कि $\{\mu_n\}$ ऐसी धन संख्याओं का अनुक्रम है जिससे कि

$$\lambda_n=\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_n\to\infty \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty. \tag{1.3}$$

रैखिक संकारकों $(R, \lambda_n, 1)$ को $t_n=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{v=0}^{n}\mu_v S_v$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। ये संकारक टाइप तथा क्रम एक[2] वाली श्रेणी Σa_n के असंतत रीज रूपान्तर हैं। यदि $\mu_n=1$, जिससे कि $\lambda_n=n+1$, तो $(R, \lambda_n, 1)$ संकारक या तो फेजर संकारक या $(C, 1)$ रूपान्तर में समानीत हो जाते हैं[4]। अब हम $\lambda_n=\lambda_{(n)}$, $\lambda_{(y)}=\lambda_{[y]}$ तथा $\mu(y)=\mu[y]$ लिखेंगे जहाँ $[y]$ सदैव की तरह y में निहित सबसे बड़े पूर्णांक का सूचक है।

माना कि $f\in C^*[0, 2\pi]$, जो संतत फलनों का एक वर्ग है उसकी सन्निकटन मात्रा

$$E_n(f)=\|f(x)-T_n(f; x)\|=\max|f(x)-T_n(f; x)|$$

द्वारा व्यक्त की जाती है जहाँ $T_n(fx)$ n डिग्री का एक त्रिकोणमितीय बहुपद है। हम कहेंगे कि $f\in \text{lip}(\alpha, p)$ यदि

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}=0(t^{\alpha}), \tag{1.4}$$

$$0<\alpha\leqslant 1,\ p>1.$$

2. हालैंड इत्यादि[3] ने नारलुण्ड संकारकों का प्रयोग करते हुए फलन $f\in C^*[0, 2\pi]$ की सन्निकटन मात्रा तथा सांतत्य मोडुलस की मात्रा के विषय में एक परिणाम प्रतिपादित किया है। उल्लेखनीय है कि हमने[6] हालैंड इत्यादि के परिणाम को रीज रूपान्तर में विस्तीर्ण किया है।

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य $f\in \text{lip}(\alpha, p)$ की सन्निकटन मात्रा का अभिकलन इसकी संयुग्मी फूरियर श्रेणी द्वारा रीज असंतत रूपान्तरों का प्रयोग करते हुए करना है। वास्तव में हम सिद्ध करेंगे कि

प्रमेय

माना कि $f \in \text{lip}(\alpha, p)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $p \geqslant 1$, 2π-आवर्ती है संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1·2) तथा $\{\mu_n\} \downarrow$, के, तो

$$E_n(f) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(f, x)| = 0 \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{K^{\alpha+1-1/p}} \right\}$$

जहाँ $\tilde{t}_n(f, x)$ असंतत रीज-रूपान्तर $(R, \lambda_n, 1)$ हैं संयुग्मी फूरियर श्रेणी के ।

उपपत्ति

यह देखा जा सकता है कि[1,7]

$$\tilde{S}_k(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t) \cos(k+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt$$

जहाँ

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

हमें ज्ञात है कि

$$\tilde{t}_n(f, x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \{\tilde{S}_k(x) - \tilde{f}(x)\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t\, dt$$

अतः

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{\sin t/2} \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t \right| dt$$

$$= I_1 + I_2, \text{ माना}$$

जहाँ

$$I_1 = \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_0^{\pi/n} \frac{\psi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t\, dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\psi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)\, t\, dt.$$

हमें ज्ञात हैं कि

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_0^{\pi/n} \frac{|\psi(t)|}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t \right| dt$$

$$= 0\ \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi/n} t^{\alpha-1-1/p} \sum_{k=0}^{n} \mu_k\, dt \Big\}$$

$$= 0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1/p}\right\}$$

$$\therefore \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |I_1| = 0\left\{\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{\alpha+1-1/p}}\right\}$$

$$\because \frac{1}{n^{\alpha-1/p}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n . n^{\alpha-1/p}} \leqslant \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_n}{K^{\alpha+1-1/p}}$$

और भी

$$|I_2| = 0\left[\frac{1}{\lambda_n}\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t \right| dt\right]$$

$$= 0\left\{\frac{1}{\lambda_n}\int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-1-1/p}\, \lambda\left(\frac{1}{t}\right) dt\right\},$$

$$\because \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cos(k+1/2)t \right| \leqslant A.\, \lambda\left[\frac{1}{t}\right]$$

निम्नलिखित तर्क दिया गया है[5]

$$= 0\left\{\frac{1}{\lambda_n}\int_{n/\pi}^{1/\pi} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1-1/p} \lambda(t)(-1/t^2) dt\right\}$$

$$= 0\left\{\frac{1}{\lambda_n}\int_1^n \frac{\lambda(t)}{t^{\alpha+1-1/p}}\, dt\right\}$$

$$= 0\left\{\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lambda(t)}{t^{\alpha+1-1/p}}\, dt\right\}$$

इस तरह

$$|I_2| = 0\left\{\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda k}{k^{\alpha+1-1/p}}\right\}.$$

I_1 तथा I_2 को मिलाने पर

$$E_n(f) = \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(f, x)| = 0\left\{\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{\alpha+1-1/p}}\right\}$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सुझावों के लिए लेखकगण प्रो० चन्द्रिका प्रसाद के आभारी हैं।

निर्देश

1. बेरी, एन० के०, Trigonometric series. Vol. II, Pergaman Press, 1964.
2. दीक्षित, जी० डी०, Indian J. Math., 1965, 7, 31-39.
3. हालैंड, ए० बी० एस०, साहनी बी० एन० तथा जिम्बालारियो, जे०, Acta Science Math., 1976, 38, 67-72.
4. कोरोव्किन, पी० पी०, Hindustan Publ. Corp. Delhi, 196[illegible]
5. मकफैडेन एल०, Duke Math. J., 1942, 9, 168-207.
6. सिंह, टीकम तथा रघुवंशी, बी० पी० (प्रेषित)
7. जिगमुन्ड, ए०, Trigonometric series, Cambridge, University Press, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

संहत दूरीक समष्टि पर स्थिर बिन्दु प्रतिचित्रण

राजेश कुमार पाण्डेय

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नरसिंहपुर (म०प्र०)

[प्राप्त—मई 19, 1989]

सारांश

इस प्रपत्र में संहत दूरीक समष्टि में फिशर तथा खान के परिणामों को अधिक सामान्य दशा के रूप में विस्तार किया गया है।

Abstract

Fixed point mappings on compact metric spaces. *By* Rajesh Kumar Pande, Department of Mathematics, Government P. G. College, Narsinghpur (M.P.).

In this paper the results of Fisher and Khan have been extended to a more general case in compact metric space.

इस प्रपत्र के परिणामों की प्रेरणा फिशर[2] तथा खान[1] के दो नवीन शोधपत्रों से प्राप्त हुई। उन्होंने सिद्ध किया है कि संहत दूरीक समष्टि (X, d) के संतत प्रतिचित्रण T में एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है यदि T निम्नलिखित की तुष्टि करे

$$d(Tx, Ty) < \tfrac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))$$

अथवा

$$d(Tx, Ty) < (d(x, Tx)\, d(y, Ty))^{1/2}$$

X में समस्त x, y के लिए जिसमें $x \neq y$.

इस प्रपत्र का उद्देश्य फिशर तथा खान के परिणामों को अधिक सामान्य दशा तक विस्तार करना है। सम्बद्ध परिणामों के लिए सिरिक[1] तथा येह[4] देखें।

प्रमेय

माना कि T किसी अरिक्त संहत दूरीक समष्टि (X, d) का प्रतिचित्रण है जिससे कि

(i) $d(T^n x, T^n y) < h(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx),$
$(d(x, y))^{-1} d(x, Tx)\, d(y, Ty), a(x, y)\, d(x, Ty)\, d(y, Tx),$
$b(x, y)\, (d(y, Tx)\, d(x, Ty))^{1/2})$

तुष्टि होती है $x \neq y$ सहित X में समस्त x, y के लिए जहाँ $n = n(x, y)$ एक धन पूर्णांक है।

(ii) $a(x, y)$ तथा $b(x, y)$ अनृण वास्तविक फलन हैं;

(iii) $h : (R_+)^8 \to PR_+ \equiv [0.\infty)$ प्रत्येक निर्देशी चर में अह्रासमान है तथा $g(t) = h(t, t, t, k_1 t, k_2 t, t, t) < t$ प्रत्येक $t > 0$ के लिए जहाँ $k_1 + k_2 \leqslant 2$ तब T का एक स्थिर बिन्दु होता है। यदि साथ ही $a(x, y) \leqslant (d(x, y))^{-1}$ तथा $b(x, x) \leqslant 1$, तो T का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति

X पर एक वास्तविक मान वाले फलन f को हम $f(x) = d(x, Tx)$. द्वारा परिभाषित करते हैं। क्योंकि चूँकि d तथा T संतत फलन हैं अतः इसका अर्थ हुआ कि fX पर संतत फलन है। चूँकि X संहत है अतः यह अपने न्यूनतम मान को प्राप्त हो लेता है इसलिए X पर u एक ऐसा बिन्दु है कि
$f(u) = \inf [f(x) : x \in X]$. यदि $u \neq Tu$,
तो (i) से यह निकलता है कि

$$f(T^n u) = d(T^n u, T^n Tu)$$
$$\leqslant h(d(u, Tu), d(u, Tu), d(Tu, T_2 u), d(u, T^2 u), d(Tu, Tu),$$
$$(d(u, Tu))^{-1} d(u, Tu)\, d(Tu, T^2 u), 0,$$
$$b(u, Tu)\, (d(Tu, Tu)\, d(u, T^2 u)^{1/2})$$
$$\leqslant h(d(Tu, T^2 u), d(Tu, T^2 u), d(Tu, T^2 u), 2d(Tu, T^2 u), 0,$$
$$d(Tu, T^2 u), 0, 0) \leqslant g d(Tu, T^2 u)) \leqslant d(Tu, T^2 u)$$
$$= f(Tu)$$

इस तरह हमें $f(T^n u) < f(Tu)$ मिलेगा जो विरोध है। यह विरोध सिद्ध करता है कि $Tu = u$.

इसके बाद हम यह सिद्ध करते हैं कि u अद्वितीय है $a(x, y) \leqslant (d(x, y))^{-1}$ एवं $b(x, y) \leqslant 1$ के लिए। माना कि $v (\neq u) T$ का स्थिर बिन्दु है। तब

$$d(u, v) = d(T^n u, T^n v) < h(d(u, v), d(u, u), d(v, v), d(u, v), d(v, u),$$
$$0, d(u, v)\, d(u, v)) \leqslant g(d(u, v)) \leqslant d(u, v)$$

क्योंकि कुछ $n=n(u, v)$, किन्तु यह असम्भव है क्योंकि $Tu=u=T^nu$ एवं $Tv=v=T^nv$. इस तरह उपपत्ति पूर्ण हुई ।

उपप्रमेय

माना कि T एक अरिक्त संहत दूरीक समष्टि (x, d) का संतत प्रतिचित्रण है जिससे निम्नलिखित की तुष्टि होती है

$$d(T^nx, T^ny)<\max [d(x, y), \tfrac{1}{2}(d(x, Ty)+d(y, Ty),$$
$$\tfrac{1}{2}(d(x, Ty)+d(y, Tx)), (d(x, x))^{-1}d(x, Tx)d(, Ty),$$
$$a(x, y)\ d(x, Ty)\ d(y, Tx), (d(x, Tx)\ d(y, Ty))^{1/2},$$
$$a(x, y)\ (d(y, Tx)\ d(x, Ty))^{1/2}]$$

X में $x\neq y$ वाले समस्त x, y के लिए जहाँ $n=n(x, y)$ एक धन पूर्णांक है तथा $a(x, y)$, $b(x, y)$ अनृण वास्तविक फलन है तब T का स्थिर बिन्दु होता है । यदि साथ ही $a(x, y)\leqslant(d(x, y))^{-1}$ तथा $b(x, y)\leqslant 1$, तो T का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है ।

निर्देश

1. सिरिक, एल० जे०, Publ. Inst. Math., 1976, **20** (34), 73-77.
2. फिशर, बी०, Publ. Inst. Math., 1978, **25**, 193-94.
3. खान, एम० एस०, Math. Japanica, 1978, **23** 201-204.
4. येह्, सी० सी०, Publ. Inst. Math., 1978, **24**, 197-199.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

तेली जाति के परिवार में ब्रेकीडक्टायली (छोटी अंगुली) की वंशावली

चतुर्भुज साहु
मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)

[प्राप्त—अप्रैल 6, 1990]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में ग्राम सांकुल, जिला हजारीबाग (बिहार) के तेली परिवार की वंशावली में ब्रेकीडक्टायली (छोटी अंगुली) से संबंधित असाधारण लक्षण लगातार चार पीढ़ियों तक पाये गये। प्रभावित छः महिलाओं में से दो को व्यक्तिगत रूप में जाँचा गया जिनमें बाँयें पैर की चौथी अंगुली छोटी एवं असाधारण मिली। यह लक्षण प्रत्येक पीढ़ी में प्रबल नहीं पाया गया तथा यह भी देखा गया कि हस्तांतरण की प्रक्रिया को दो प्रबल जीनों की परिकल्पना से व्याख्यायित किया जा सकता है जिसमें एक जीन छोटी अंगुलीय जीन द्वारा 'भेदन' को रोकता है।

Abstract

A pedigree of short digit Brachydactyly in a Teli family. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar).

A pedigree of short digit concern with four generations in a family of Teli community of Sankul, Dist. Hazaribagh, Bihar is presented. Out of 6 affected individuals only two could be personally examined and their left feet showed short finger IV. Irregular dominance of the trait is shown and it is deduced that the mode of inheritance can be explained by postulating two dominant genes, one of which controls the penetrance of short finger gene.

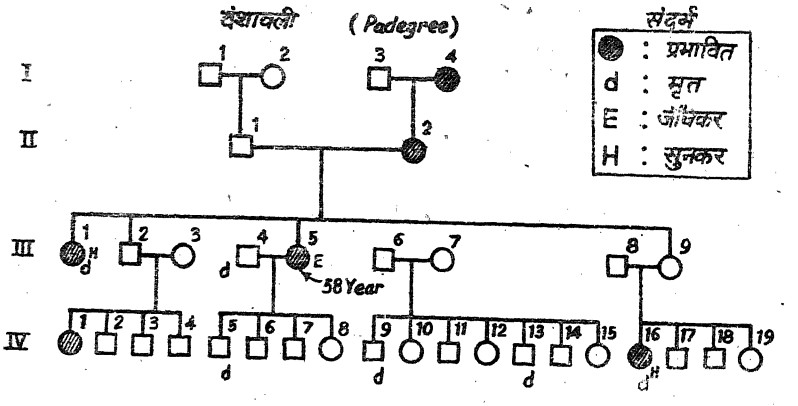
ब्रेकीडक्टायली (छोटी अंगुली) मानव कुटुम्बों में वंशागत असाधारण लक्षणों में से एक है। यद्यपि छोटी अंगुली के विभिन्न प्रकार एवं स्थान का महत्व तथा संबंध के बारे में स्पष्ट पता नहीं है फिर भी उसे मानव वंशावली में खोजना जारी है ।

प्रस्तुत अध्ययन ग्राम सांकुल, जिला हजारीबाग (बिहार) की एक महिला जुठिया देवी के साथ किया गया। उसका जन्म 1924 ई० में तेली परिवार में हुआ है। उसके बाँये पैर की चौथी अंगुली असाधारण तथा छोटी है। वह बताती है कि यही लक्षण उसकी माँ एवं नानी में भी था। इससे यह पता चलता है कि तेली परिवार में असाधारण अंगुली के प्रकटीकरण में प्रबल जीन शामिल रहते हैं।

प्रयोगात्मक

असाधारण लक्षण का वर्णन

प्रोबेण्ड III_5 एक ब्रेकीडक्टायली महिला है। उसके बाँये पैर की IV अंगुली छोटी है और थोड़ा ऊपर से ही निकली हुई है। वह बताती है कि यही लक्षण उसकी माँ (II_2) तथा नानी (I_4) में भी था, जबकि उसके पति में इस प्रकार की कोई त्रुटि नहीं थी। सारणी 1 में कल्पनात्मक सम्भव जीनोटाइप का वर्णन किया गया है। प्रोबेण्ड के कोई भी बच्चे इस असाधारण लक्षण से प्रभावित नहीं हैं। लेकिन प्राप्त आंकड़े एवं अनुमानित आंकड़ों के बीच पृथक्करण अनुपात में अन्तर पाया गया है। प्रोबेण्ड की बड़ी बहन (III_1) में जो 18 वर्ष की ही आयु में मर गई, वही असाधारण लक्षण सिर्फ एक ही पैर में नहीं बल्कि दोनों पैरों में था। उसे कोई संतान न थी। प्रोबेण्ड के दो भाई III_2 एवं III_6 और एक बहन III_9 सामान्य हैं। परन्तु प्रोबेण्ड के बड़े भाई की बेटी IV_1 एवं छोटी बहन की बेटी IV_{16} में वही असाधारण लक्षण पाये गये हैं। प्रोबेण्ड की माँ II_2 इसी असाधारण लक्षण से प्रभावित थी जबकि पिता II_1



वंशावली (Pedigree)

सामान्य था। पिता II_1 के परिवार के लोगों को भी जाँचा गया परन्तु इस प्रकार का एक भी केस प्राप्त नहीं हुआ।

अतः यह पता चलता है कि ब्रेकीडक्टायली सिर्फ माँ I_1 की ही पीढ़ी में पायी गयी है। यह सम्भव है कि II_2 अपना ब्रेकीडक्टायली जीन III_1 एवं III_5 में स्थानान्तरित किया है। साथ ही साथ III_2 एवं III_9 में भी स्थानान्तरित किया है जो अप्रबल (रिसेसिव) रूप में मौजूद है और वह अगली पीढ़ी में उनकी प्रथम पुत्रो में प्रकट हो गई है।

जुठिया देवी की प्रस्तुत वंशावली पर विचार करने से तथा दुर्लभ ब्रेकीडक्टायली जीन युग्म *B, b* तथा सहायक युग्म (एक्सेसरी पेयर) *A, a* का संकेत देने से हम यह अनुमान कर सकते हैं कि ब्रेकीडक्टायलों में जीनी बनावट BbAA या BbAa होती है तथा II_2 वस्तुतः BbAa थी। प्रोबेण्ड III_5 भी सम्भवतः BbAa है जिसका विवाह III_4 से हुआ था जो प्रभावित नहीं था। उसकी जीनी बनावट bbaa थी। प्रोबेण्ड की बहन III_1 लगभग 18 वर्ष की ही आयु में कालकवलित हो गई जिसकी जीनी बनावट सम्भवतः BbAa थी। प्रस्तुत वंशावली में ब्रेकीडक्टायली लक्षण सिर्फ महिलाओं में ही लगातार चार पीढ़ियों तक पाया गया है।

सारणी 1

सम्भावित जीन प्रारूप एवं विसंयोजन अनुपात (ब्रेकीडक्टायली को व्यक्त करने के लिये दो प्रबल जीनों की आवश्यकता वाली परिकल्पना पर आधारित)

क्रम संख्या	वंशावली पित्रीय यौन संबंध का नामकरण	उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन प्रारूप	विसंयोजन अनुपात	
			अनुमानित	प्राप्त
1.	$II_1 \times II_2$	bbaa × BbAa	2 : 2	2 : 3
2.	$III_4 \times III_5$	bbaa × BbAa	2 : 2	0 : 4
3.	$III_2 \times III_3$	bbaa, bbAA, bbAa × या bbAa, bbaa	सभी सामान्य	1 : 3
4.	$III_3 \times III_9$	bbaa, bbAA, bbAa × या bbAa, bbaa	,,	1 : 3

सारणी 2

ब्रेकीडक्टायली पिता एवं माता से उत्पन्न सन्तानों की स्थिति

वंशावली संदर्भ	उत्पन्न सन्तानें							
	प्रभावित पिता				प्रभावित माता			
	पुत्र		पुत्री		पुत्र		पुत्री	
	प्र०	अप्र०	प्र०	अप्र०	प्र०	अप्र०	प्र०	अप्र०
III	0	0	0	0	0	2	2	1
IV	0	0	0	0	0	3	0	1

प्र० =प्रभावित अप्र० =अप्रभावित

विवेचना

मल्होत्रा[1] ने सूरत (प० भारत) के एक पोलिडक्टाइलस वंशावली का वर्णन करते हुये यह सुझाव दिया है कि पोलिडक्टायली का हस्तांतरण प्रभावी जीन के बदलते हुये ढंग के कारण हो सकता है ।

मल्होत्रा तथा रीफ[2] ने पश्चिम भारत के सिंडक्टायली एवं क्लाइनोडक्टायली की एक वंशावली प्रकाशित करवायी है जहाँ यह पता चलता है कि उस परिवार में प्रभावी क्लाइनोडक्टायली अपूर्ण भेदन ('पेनिट्रेन्स') के साथ कार्यशील है ।

बसु[3] ने पहिरा के तीन पोलिडक्टायली एक ब्रेकीडक्टायली एव एक सिंडक्टायली परिवारों का वर्णन करते हुये उनकी बीच अंगुलीय अनियमितताओं की बारम्बारता की गणना भी की है ।

चक्रवर्ती[4] के तटीय आन्ध्र प्रदेश के रेड्डी परिवार में अतिरिक्त अंगुली V पोलिडक्टायली की वंशावली का अध्ययन किया । उन्होंने दुर्लभ पोलिडक्टायली जीन युग्म pp एवं अतिरिक्त युग्म Aa पर विचार किया और पाया कि जीनोटाइप और बिसंयोजन अनुपात दो प्रमुख जीनों की परिकल्पना पर आधारित है । माता-पिता के लैंगिक पोलिडक्टायली से इसकी जाँच उनकी सन्तानों पर करने से कोई महत्वपूर्ण परिणाम नहीं मिला ।

चक्रवर्ती[5] ने तटीय आंध्रप्रदेश की दो वंशावलियों का भी अध्ययन किया जहाँ दो जीनों की परिकल्पना को पुनः निश्चित देखा जाता है ।

प्रस्तुत वंशावली में प्रोबेण्ड, उसकी मां एवं नानी, उसके बड़े भाई की बेटी तथा छोटी बहन की बेटी में बाँये पैर की IV अंगुली (ब्रेकीडक्टायलस) का असामान्य लक्षण एक ही जैसा

था । प्रोबेण्ड की बड़ी बहन में इस तरह की असामान्यता दोनों ही पैरों में थी । अतः प्रस्तुत अध्ययन में दो महत्वपूर्ण परिणाम पाये गये—

(i) एक ही आकृति का ब्रेकीडक्टायली लक्षण लगातार चार पीढ़ियों (I_4, II_2, III_1, III_5, IV_1 एवं IV_{16}) से चलता आ रहा है ।

(ii) यह असाधारण लक्षण सिर्फ महिलाओं में ही पाया गया है ।

निर्देश

1. मल्होत्रा, के० सी०, **एन्थ्रोपोलोजिस्ट**, 1961, 1
2. मल्होत्रा के० सी० तथा रीफ, डी० सी०, **हेरेड 54** 1963, 219
3. बसु, ए०, **मैन**, 1969, 274
4. चक्रवर्ती, एम० आर०, **ई० ज० मे० रिसर्च**, 1971, 945
5. चक्रवर्ती, एम०, आर०, **ई० ज० फि० ए० हु० जे०** 975, 1, 175

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

कॉपर (III) अभिकर्मक द्वारा कुछ पालीहाइड्रॉक्सी तथा थायोकार्बनिक यौगिकों का सूक्ष्मनिर्धारण

ईश्वर चन्द्र शुक्ल तथा संजय शुक्ल

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मार्च 2, 1990]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में कॉपर (III) अभिकर्मक द्वारा कुछ पॉलीहाइड्रॉक्सी ऐल्कोहलों, थायोयूरिया और थायोऐमीनो अम्लों के मिलीग्राम निर्धारण की विधि का वर्णन किया गया है। प्रतिदर्श की मिलीग्राम मात्रा की अभिक्रिया अभिकर्मक के ज्ञात आधिक्य के साथ निश्चित समय तक खौलते हुये जल-ऊष्मक पर करायी जाती है। अभिक्रिया के समाप्त होने पर प्रतिदर्श के लिये आवश्यक अभिकर्मक की मात्रा को पश्चअनुमापन विधि द्वारा परिकलित किया जाता है। इस विधि द्वारा प्राप्त परिणामों में $\pm 0.5\%$ की त्रुटि होती है। प्रत्येक यौगिक के लिए रसमीकरणमितिक अध्ययन किया गया और सभी के लिये संभावित अभिक्रिया प्रस्तावित की गई।

Abstract

Application of Cu(III) for micro determination of some polyhydroxy and thio organic compounds. By L. C. Shukla and Sanjay Shukla, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the present paper a simple and convenient method has been described for the milligram determination of some polyhydroxy alcohols, thioureas and thio amino acids with the use of Cu(III) reagent. Milligram amounts of the sample are allowed to react with a known excess of the reagent for required reaction time on a boiling water bath. After the reaction is over, the amount of the reagent required for the sample is calculated by back titration method. The results obtained with the reagent are within the error of $\pm 0.5\%$. The stoichiometric studies were made and a possible course of reaction is suggested for all the compounds.

कॉपर (III) का अनुप्रयोग एक उपचायक के रूप में किया गया है। अधिकांशत: इस अभिकर्मक से अनुमापनमिति द्वारा शर्करा,[2] ग्लिसरॉल[1] तथा कुछ अकार्बनिक यौगिकों का निर्धारण प्रतिवेदित है। विभवमितीय निर्धारण में भी इस अभिकर्मक का प्रयोग उल्लिखित है। कॉपर (III) अनुमापनमिति में विकास होने के कारण इस विधि का अनुसरण उपचयनीय यौगिकों के परिकलन[5, 6] में सुगमतापूर्वक किया गया है। प्रस्तुत शोध-पत्र में कॉपर (III) अभिकर्मक द्वारा कुछ पॉलिहाइड्रॉक्सी ऐल्कोहलों, थायो यूरिया और थायोऐमीनो अम्लों का निर्धारण पहली बार सूक्ष्म परिमाण पर किया गया है। कार्बनिक यौगिकों की अभिक्रिया कॉपर (III) अभिकर्मक के ज्ञात आधिक्य से करायी जाती है तथा बिना क्षय हुआ अभिकर्मक आर्सेनाइट विधि[7] द्वारा पश्च-अनुमापित किया जाता है।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मक : आर्सेनाइट विलयन (0.02M), सल्फ्यूरिक अम्ल (0.05M), सोडियम बाइकार्बोनेट विलयन (0.05M), आयोडीन विलयन (0.01M) तथा स्टार्च विलयन (1%)।

पोटैशियम डाईटेल्यूरेटो क्यूपरेट (III) अभिकर्मक (0.0235M) बनाने के लिये क्यूपरिक सल्फेट (1.56g), पोटैशियम टेल्यूराइट (3.173g), पोटैशियम परसल्फेट (4.22g) और पोटैशियम हाइड्राक्साइड (8.0g) को 80 मिली आसुत जल में मिलाया जाता है। इस मिश्रण को प्रबलता से हिला कर गर्म प्लेट पर लगभग 20 मिनट तक उबाला जाता है। उबालने पर मिश्रण गहरे लाल रंग का हो जाता है। उबालने की प्रक्रिया अगले 20 मिनट तक और जारी रखी जाती है। मिश्रण को ठंडा करके सिन्टरित मूषा (G^4) द्वारा छाना जाता है और निस्यंद को 100 मिली० तक आसुत जल द्वारा तनुकृत किया जाता है। इस प्रकार तैयार किये गये अभिकर्मक का क्षारीय घोल स्थायी रहता है और संग्रह विलयन के रूप में प्रयोग किया जाता है। अभिकर्मक को आर्सेनाइट विधि द्वारा मानकीकृत किया जाता है।

प्रतिदर्श घोल : अनुसंधान के लिये चुने गये सभी प्रतिदर्श या तो ऐनेलार बी० डी० एच० कोटि के हैं या पुन: क्रिस्टलन द्वारा तब तक शोधित किये गये जब तक कि स्थायी गलनांक को न प्राप्त हो जायें। अधिकतर यौगिक आसुत जल में घुल जाते हैं। प्रतिदर्श घोल की सांद्रता 1 gm/ml रखी गई।

विधि : प्रतिदर्श के (1–5 mg) अंशशोधक को 150 मिली० के शंक्वाकार फ्लास्क में लेकर उसमें 10 मिली० कॉपर (III) अभिकर्मक मिलाया जाता है। कुछ यौगिकों के लिये 20 मिली० अभिकर्मक का प्रयोग किया जाता है। अभिक्रिया मिश्रण युक्त फ्लास्क, को जिसमें पश्चवाही द्रवणित्र भी लगा होता है, प्रबलता से हिलाकर खौलते हुये जल-ऊष्मक पर 5-30 मिनट तक रखा जाता है। प्रतिस्पंदन के समय अभिक्रिया मिश्रण का आयतन, द्रवणित्र द्वारा निश्चित मात्रा में आसुत जल मिलाकर नियंत्रित रखा जाता है। निश्चित समय तक फ्लास्क को गर्म करने के बाद अंतर्वस्तु को कमरे के तापमान तक ठंडा किया गया है। अप्रयुक्त कॉपर (III) अभिकर्मक निम्नांकित आर्सेनाइट विधि से पश्च अनुमापनमिति द्वारा ज्ञात किया जाता है।

उपर्युक्त अभिक्रिया-मिश्रण में 10 मिली० सोडियम आर्सेनाइट विलयन (0.02M) मिलाया जाता है तथा इस मिश्रण को 2 मिनट तक रख दिया जाता है। तत्पश्चात् इसको 2N सल्फ्यूरिक अम्ल से तब तक अम्लीकृत किया जाता है जब तक कि हरा निलंबन विलीन न हो जाये। इस प्रकार एक स्वच्छ अम्लीय विलयन प्राप्त होता है। अब इसे क्षारीय बनाने के लिये 5 मिली० सोडियम कार्बोनेट विलयन (0·5M) मिलाया जाता है। अप्रयुक्त आर्सेनाइट को आदर्श आयोडीन विलयन (0.01M) से स्टार्च सूचक प्रयोग करते हुये पश्चअनुमापित किया जाता है। एक कंट्रोल प्रयोग भी सम्पन्न किया जाता है तथा प्रतिदर्श की उपलब्धि निम्नांकित प्रकार से ज्ञात की जाती है—

$$\text{प्रतिदर्श का द्रव्यमान (मिग्रा०)} = \frac{MN(S-B)}{n}$$

जहाँ, M=प्रतिदर्श का अणुभार, N=आयोडीन विलयन की नार्मलता, S=प्रतिदर्श के लिये आयोडीन विलयन का आयतन, B=आयोडीन विलयन का बिना कंट्रोल के लिये आयतन, n=प्रतिदर्श के प्रति मोल हेतु अभिकर्मक के मोलों की संख्या।

परिणाम तथा विवेचना

पॉलिहॉइड्रिक ऐल्कोहॉलों, थायोऐमीनो अम्लों और थायोयूरिया को सूक्ष्म परिमाप पर ज्ञात करने के लिये अभिस्तावित प्रक्रिया ±5.0% त्रुटि के अंतर्गत अनुप्रयुक्त होती है (सारणी 1)।

पालीहाइड्रॉक्सी ऐल्कोहलों की क्रियाविधि को निर्धारित करने के लिये रससमीकरणमिति तथा प्राप्त अभिक्रिया उत्पादों को आधार मानकर क्रिया समझाई गई है। एरिथ्रिटोल तथा पेन्टाएरिथ्रिटोल क्रमशः 18 तथा 24 मोल Cu(III) अभिकर्मक का उपयोग करते हैं। इनके पूर्ण आक्सीकृत होने के पश्चात् यौगिक कार्बन डाइआक्साइड तथा जल में अपघटित हो जाता है। कार्बन डाइआक्साइड का परीक्षण अभिक्रिया उत्पादों से प्राप्त होता है। एरिथ्रिटोल की Cu(III) के साथ अभिक्रिया निम्नवत् है।

$$HOCH_2\,CHOH\,CHOH\,CH_2OH \xrightarrow[9\,[O]]{18\,Cu\,(III)} 4\,CO_2 + 5\,H_2O$$

इसी प्रकार पेन्टाहाइड्रिक ऐल्कोहल से भी CO_2 तथा H_2O अन्तिम क्रिया उत्पाद के रूप में प्राप्त होते हैं

$$HOCH_2\,(CHOH)_3\,CH_2OH \xrightarrow[11\,[O]]{22\,Cu\,(III)} 5CO_2 + 5H_2O$$

हेक्साहाइड्रिक ऐल्कोहलों की क्रियाविधि में कोई अन्तर नहीं होता, केवल Cu (III) अभिकर्मक की अधिक मात्रा का प्रयोग होता है।

$$HOCH_2\,(CHOH)_4\,CH_2OH \xrightarrow[13\,[O]]{26\,Cu\,(III)} 6\,CO_2 + 7\,H_2O$$

सारणी I

कॉपर (III) अभिकर्मक द्वारा कुछ कार्बनिक योगिकों का निर्धारण*

	प्रतिदर्श	ली गई मात्रा (मि०ग्रा०)	परिकलन द्वारा प्राप्त मात्रा (मि०ग्रा०)	अभिक्रिया समय (मिनट)	रस-समी-करणमिति	मानक विचलन	विचरण गुणांक
1.	एरिथ्रिटॉल	5.00	5.0103	10	18	0.0035	0.0698
2.	पेन्टा एरिथ्रिटॉल	5.00	5.0086	10	24	0.0032	0.0638
3.	ऐडोनिटॉल	5.00	5.0136	20	22	0.0094	0.3129
4.	ज़ाइलिटॉल	5.00	5.3308	20	22	0.0151	0.3001
5.	अरेबिटोल	5.00	5.0050	20	22	0.0030	0.0998
6.	सार्बिटाल	5.00	5.0086	30	26	0.0136	0.2595
7.	मैनिटॉल	5.00	4.9703	30	26	0.0033	0.0664
8.	इडिटॉल	5.00	5.0166	30	26	0.0109	0.3331
9.	टैलिटॉल	5.00	5.0153	30	26	0.0029	0.0578
10.	डलसिटॉल	5.00	4.9848	30	24	0.0044	0.0882
11.	थायोयूरिया	5.00	5.0093	25	8	0.0109	0.2001
12.	फ़ेनिल थायो-यूरिया	5.00	4.9920	15	36	0.0018	0.0360
13.	α-नेफथाइल थायोयूरिया	5.00	4.9950	20	54	0.0095	0.1901
14.	थायोसेमी-कार्बेज़ाइड	5.00	5.0263	30	12	0.0066	0.1313
15.	सिस्टीन	5.00	5.0176	30	28	0.0092	0.3070
16.	मेथिओनीन	5.00	4.9918	30	40	0.0091	0.3030
17.	सिस्टीइन	5.00	5.0088	30	54	0.0137	0.2735

*नौ का औसत निर्धारण

थायोऐमीनो अम्ल और थायोयूरिया जैसे सल्फर यौगिकों का उपचयन समान प्रतिमान पर अग्रसरित होता है। यौगिक पूरी तरह से अमोनिया, कार्बन डाइआक्साइड और जल में उपचित हो जाता है। थायोयूरिया उपचित होने वाला सरलतम यौगिक है।

$$NH_2\,C\,S\,NH_2 \xrightarrow[4[O]+3H_2O]{8Cu\ (III)} 2\,NH_3+CO_2+H_2\,SO_4$$

अभिक्रिया उत्पाद में अमोनिया और कार्बन डाइआक्साइड का पाया जाना क्रियाविधि की पुष्टि करता है। फेनिल या नेप्थाइल समूह के थायोयूरिया में उपस्थित होने से रससमीकरणमितिक अनुपात बढ़ जाता है किन्तु अभिक्रिया पथ प्रतिबाधित नहीं होता है। सिस्टीन और मेथिओनीन के उपचयन से पूर्ण अपघटन होता है।

$$HS-CH_2-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-COOH \xrightarrow[14\ [O]]{28\ Cu\ (III)} SO_4^{--}+NO_3^{-}+3\,H_2O+3\,CO_2$$

इस प्रकार यह निष्कर्ष निकलता है कि कॉपर (III) प्रबल उपचायक है और बड़ी संख्या में कार्बनिक यौगिकों के निर्धारण में सफलतापूर्वक कार्य करता है। रससमीकरणमिति और अभिक्रिया समय यौगिक की संरचना पर निर्भर करते हैं।

संतोषजनक परिणामों के लिये अभिक्रिया को पश्चवाही स्थिति में कराया जाता है। कम ताप-मान पर अभिक्रिया धीमी और अपूर्ण रहती है। कॉपर (III) अभिकर्मक का द्विगुण आधिक्य यथार्थ परि-णाम के लिये अति आवश्यक है। उच्च आण्विक भार वाले यौगिकों के लिये अधिक मात्रा में कॉपर (III) अभिकर्मक की आवश्यकता होती है। एक बार अभिकर्मक के स्थायीकृत होने पर यदि इसे पॉलियीन की बोतल में रखा जाय तो यह एक महीने तक अपघटित नहीं होता है। अभिक्रिया क्षारीय माध्यम में करायी जाती है जो कि अभिकर्मक के स्थायीकरण के लिये आवश्यक होता है। यथार्थ परिणाम प्राप्त करने के लिये अभिक्रिया मिश्रण में आसानी से उपचित होने वाले पदार्थों से बचना चाहिये।

निर्देश

1. बेक, जी०, **माइक्रोकेमि०**, 1950, **35**, 169.
2. वही, वही, 1953, **40**, 258.
3. वही, वही, 1951, **36**, 245.
4. कीवर्थ, डी० ए० तथा स्टोन, के० जी०, Analytical Chemistry, 1955, **27**, 833.
5. जायसवाल, पी० के० तथा यादव, के० एल०, **टैलन्टा**, 1970, **17**, 236.
6. रेड्डी, के० बी०, साथूराम, बी० और राव, टी० एन०, **इण्डि० जर्न० केमि०** 1981, **21**, 395.
7. चन्द्रा, एस० तथा यादव, के० एल०, **टैलन्टा**, 1968, **15**, 349.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

मसूरी रॉक फास्फेट के साथ वाहित मल-जल (सीवेज) एवं अवमल (स्लज) का उपयोग

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 1, 1990]

सारांश

मिट्टी में अवमल (स्लज) की चार विभिन्न मात्रायें (0, 10, 20, 30 टन प्रति हेक्टेअर) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (M. R. P.) की चार विभिन्न मात्रायें (0, 120, 140, 160 कि० ग्रा०प्रति हेक्टेअर) डालने के बाद वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर जब मेंथी उगाई गयी तो यह देखा गया कि स्लज तथा मसूरी रॉक फास्फेट की मात्रा में वृद्धि के साथ फसल की बढ़वार तथा उपज दोनों में ही अभिवृद्धि होती है। पौधें द्वारा ग्रहीत भारी धातु तत्वों में कोई उल्लेखनीय प्रवृत्ति नहीं देखी जाती। ये परिणाम मिट्टी में ऊपर से डाले गये इन्हीं तत्वों से प्राप्त परिणामों से सर्वथा भिन्न हैं।

Abstract

Use of sewage water and sludge with Mussoorie Rock Phosphate. *By* S.G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University.

Field experiments were conducted at Sheila Dhar Institute Farm on the use of sewage water for irrigating fenugreek crop after adding four different doses of sludge (0, 10, 20, 30 tons per hectare) and Mussoorie Rock Phosphate singly and in combination. It was observed that the growth of plants and the yield of greeny vegetable matter were considerably increased in comparison to control.

This synergistic effect of sewage-sludge and phosphatic material may be due to reduced uptake of toxic heavy metals present in the sewage sludge.

वाहित मल-जब (सीवेज) एवं अवमल (स्लज) के लगातार उपयोग से मिट्टी में Cd, Cr, Pb, Zn आदि विषैले भारी तत्वों की मात्रा में वृद्धि होती है।[1] इनमें से मुख्य रूप से Cd तथा Ni की मात्रा में वृद्धि सीवेज-स्लज के लगातार प्रयोग से देखी गयी है,[2,3]। इंग्लैण्ड तथा वेल्स के 42 सीवेज-स्लज के नमूनों में Cu की मात्रा 8000 mg/kg, Ni की मात्रा 5300mg/kg, Zn की मात्रा 4900 mg/kg, Pb की मात्रा 3000 mg/kg तथा Cd की मात्रा 1500 mg/kg तक पायी गयी है।[4] यू० एस० ए० में सीवेज के नमूने में Cd की मात्रा 3400 mg/kg तक पायी गयी है।[5] वैसे अवमल (स्लज) कार्बनिक पदार्थ का एक अच्छा स्रोत है किन्तु औद्योगिक क्षेत्रों में विषैले भारी तत्वों की उपस्थिति के कारण इसके हानिकारक प्रभाव से बचने के लिये फास्फोरस युक्त उर्वरक का प्रयोग आवश्यक होता है। कार्बनिक पदार्थ एवं फास्फोरस युक्त उर्वरक की उपस्थिति में विषैले तत्वों का अवशोषण पौधों में कम होता है क्योंकि कार्बनिक पदार्थ भारी तत्वों के साथ जटिल यौगिक बनाकर[6] उन्हें निश्चेष्ट बनाता है[7]। कार्बनिक पदार्थ की अधिकता मिट्टी में भारी विषैले तत्वों के वितरण को भी प्रभावित करती है। ऐसा मिट्टी के पी० एच० मान, धनायन विनिमय क्षमता में परिवर्तन के कारण होता है।

हमारे देश में घरेलू वाहित मलजल तथा अवमल का उपयोग छोटे छोटे भूखण्डों में तरकारी उगाने के लिए किया जाता है। संयोगवश, ऐसे भूखण्डों में इस तरह के मल जल तथा अवकल के प्रयोग से फसल द्वारा ग्रहीत विषैले तत्वों पर विशेष अध्ययन नहीं किये गये हैं फलतः इस दृष्टि से कुछ प्रयोग करने की योजना बनाई गई।

प्रस्तुत अध्ययन में मसूरी रॉक फास्फेट के साथ सीवेज-स्लज के प्रयोग से मिट्टी व पौधों में भारी तत्वों की सान्द्रता तथा मेंथी की बढ़वार व उपज पर पड़ने वाले प्रभावों को दिखाया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये शीलाधर मृदा-विज्ञान संस्थान के कृषि फार्म को चुना गया जिसकी सिंचाई विगत 15 वर्षों के वाहित मल-जल द्वारा की जा रही है।

इस प्रयोग के लिये मेंथी को सूचक फसल के रूप में उगाया गया। 48 वर्गमीटर के क्षेत्रफल में यादृच्छिक विधि से 1×1 मीटर^2 के प्लाट बनाकर उपचार किया गया।

कार्बनिक पदार्थ के स्रोत के रूप में हमने स्लज की चार विभिन्न मात्रायें (0, 10, 20, 30 टन प्रति हैक्टेअर) तथा फास्फेट के स्रोत के रूप में मसूरी रॉक फास्फेट की चार विभिन्न मात्रायें (0, 120, 140, 160 कि० ग्रा० प्रति हैक्टेअर) प्रयुक्त कीं। मसूरी रॉक फास्फेट में कुल P_2O_5 की मात्रा 19.4% तथा स्लज में कुल नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं पोटाश की मात्रायें क्रमशः 1.5, 1.0, तथा 1.0% थीं। स्लज में कार्बन 1.02% था। स्लज में भारी धातुओं की मात्रा सारिणी 1 में दी गयी है। इन भारी धातुओं की मात्रा एटॉमिक एब्जार्बसन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा ज्ञात की गयी।

मेंथी की बुवाई दिनांक 18-11-89 को 30 कि० ग्रा० बीज प्रति हेक्टेअर की दर से की गयी। प्लाटों की सिंचाई वाहित मल-जल से समय-समय पर की गयी। कुल 8 सिंचाइयाँ की गयीं।

तत्पश्चात् क्रमशः 20 व 40 दिन बाद पौधों की बढ़वार सम्बन्धी प्रेक्षण किये गये। परिणाम सारणी 2 में अंकित हैं।

40 दिनों के बाद फसल को उखाड़कर मेंथी का ताजा हरा तथा शुष्क भार ज्ञात किया गया (सारणी 3)। शुष्क नमूनों का विश्लेषण Cd, Cr, Pb तथा Zn इन चार विषैले तत्वों के लिए किया गया। इसके लिए पौदों के नमूनों को द्वि-अम्ल मिश्रण से पाचित करके एटामिक एबजार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा चार तत्वों की मात्रा ज्ञात की गई। प्राप्त परिणाम सारणी 4 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1

अवमल (स्लज) में भारी धातुओं की सान्द्रता

भारी धातु	सान्द्रता (पी० पी० एम० में)
Cd	1.47
Cr	0.78
Pb	0.45
Zn	8.94
Fe	71.9
Mn	15.8

इस सारणी से स्पष्ट है कि अवमल में Cd तथा Zn की प्रचुर मात्राएँ उपस्थित हैं।

सारणी 4 से स्पष्ट है कि स्लज डालने से विषैली भारी धातुओं यथा कैडमियम (Cd), क्रोमियम (Cr), लेड (Pb), जिंक (Zn), का पौधों द्वारा अधिक मात्रा में अवशोषण नहीं हुआ। किन्तु जहाँ अधिक फास्फेट डाला गया वहाँ कैडमियम (Cd) के अवशोषण में काफी कमी आई। इसका कारण यही हो सकता है कि मिट्टी में डाले जाने पर स्लज में उपस्थित प्रदूषक तत्व अनुपलब्ध बन जाते हैं। लेकिन सबसे अधिक महत्वपूर्ण कारण यह प्रतीत होता है कि प्रयुक्त स्लज घरेलू (domestic) था इसलिए विषैली भारी धातुओं की मात्रा पहले से ही कम थी (स्मरण रहे औद्योगिक स्लज में इन विषैली भारी धातुओं की मात्रा काफी अधिक होती है)। घरेलू स्लज में प्रायः जिंक (Zn) की मात्रा ही अधिक होती है फलतः पौधों में जिंक (Zn) की मात्रा में तो वृद्धि हुयी किन्तु शेष तीन तत्वों में कोई विशेष परिवर्तन दिखायी नहीं दिया।

सारणी 2

मेंथी की बढ़वार

	उपचार	बुवाई के 20 दिन बाद		बुवाई के 40 दिन बाद	
		पत्तियों की संख्या	ऊँचाई (से०मी०में)	पत्तियों की संख्या	ऊँचाई (से०मी०में)
1.	कन्ट्रोल (स्लज+म॰ रा॰ फा॰=0)	7	5	32	28
2.	स्लज (0)+म॰ रा॰ फा॰ (120 कि॰ ग्रा॰/है॰)	8	6	34	29
3.	स्लज (0)+म॰ रा॰ फा॰ (140 कि॰ ग्रा/है॰)	7	4	32	26
4.	स्लज (0)+म॰ रा॰ फा॰ (160 कि॰ ग्रा॰/है॰)	7	4	32	26
5.	स्लज (10 टन/है०)+म॰ रा॰ फा॰ (0)	7	6	34	29
6.	स्लज (10 टन/है०)+म॰ रा॰ फा॰ (120 कि॰ ग्रा॰/है॰)	7	6	36	30
7.	स्लज (10 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (140 कि॰ ग्रा॰/है॰)	6	5	32	28
8.	स्लज (10 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (160 कि॰ ग्रा॰/है॰)	5	3	28	25
9.	स्लज (20 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (0)	7	5	30	26
10.	स्लज (20 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (120 कि॰ ग्रा॰/है॰)	5	4	30	26
11.	स्लज (20 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (140 कि॰ ग्रा॰/है॰)	6	4	32	28
12.	स्लज (20 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (160 कि॰ ग्रा/है॰)	6	5	31	28
13.	स्लज (30 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (0)	7	5	35	30
14.	स्लज (30 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (120 कि॰ ग्रा॰/है॰)	7	6	32	28
15.	स्लज (30 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (140 कि॰ ग्रा॰/है॰)	7	5	36	30
16.	स्लज (30 टन/है॰)+म॰ रा॰ फा॰ (160 कि॰ ग्रा॰/है॰)	7	6	36	30

सारणी 2 से स्पष्ट है कि जिन प्लाटों में स्लज तथा म॰ रा॰ फा॰ दोनों डाले गये उनमें पौधों की बढ़वार सर्वाधिक होती है ये प्रेक्षण चाहे 20 दिन बाद के हों या 40 दिन बाद के।

सारणी 3

मेंथी की उपज

	उपचार	ताजा भार ग्राम/मी.^{2}	शुष्क भार ग्राम/मी.^{2}
1.	कन्ट्रोल (स्लज+म. रा. फा=0)	300	60
2.	स्लज (0)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	500	100
3.	स्लज (0)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	300	60
4.	स्लज (0)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	500	100
5.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (0)	500	100
6.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा. है.)	400	80
7.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	640	140
8.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	360	75
9.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (0)	400	80
10.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	600	120
11.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.	500	600
12.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	800	160
13.	स्लज (30 टनहै.)+म. रा. फा. (0)	720	150
14.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	900	180
15.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	800	160
16.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	1300	260

सारणी 3 से स्पष्ट है कि जिन प्लाटों में स्लज तथा म. रा. फा. की अधिक मात्रा डाली गयी उनमें शुष्क भार की मात्रा अधिक प्राप्त हुई।

सारणी 4

मेंथी की पत्तियों में भारी तत्वों की सान्द्रता (पी० पी० एम० में)
डाई-एसिड निष्कर्षित

	उपचार	सान्द्रता (पी० पी० एम० में)			
		Cd	Cr	Pb	*Zn*
1.	कन्ट्रोल (स्लज+म. रा. फा.=0)	5.33	14.7	13.6	13.5
2.	स्लज (0)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	4.66	14.6	13.2	16.4
3.	स्लज (0)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	6.66	14.6	12.9	17.1
4.	स्लज (0)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	2.33	14.0	11.0	19.3
5.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा (0)	5.33	1.38	13.8	17.8
6.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	8.00	12.6	13.0	20.0
7.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	7.33	12.2	13.2	21.5
8.	स्लज (10 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	6.00	11.9	12.8	21.8
9.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (0)	6.66	14.0	12.6	22.6
10.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	7.33	13.2	12.2	17.5
11.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	6.00	13.5	13.0	22.9
12.	स्लज (20 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	3.33	13.4	13.2	23.3
13.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (0)	2.00	12.8	12.2	20.8
14.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (120 कि. ग्रा./है.)	6.00	11.6	11.9	21.5
15.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (140 कि. ग्रा./है.)	4.66	13.2	11.8	23.7
16.	स्लज (30 टन/है.)+म. रा. फा. (160 कि. ग्रा./है.)	4.00	12.2	12.0	21.4

स्पष्ट है कि घरेलू स्लज डालकर उगाई जाने वाली तरकारी की फसलों में विषैला प्रभाव काफी समय तक नहीं पड़ेगा।

निर्देश

1. मिश्रा, एस० जी०, श्रीवास्तव, सी० पी० तथा दिनेश मणि, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1988, 31,
2. एण्डरसन, ए०, J. Agric. Res., 1976, **6**, 27-36.
3. ल्यूट्रिक, एम० सी०; बर्टलैण्ड, जे० ई० तथा बर्लेण्ड, एच० एल०, Soil and Crop Science Florida 1976, **35**, 101-106.
4. बैरो, जे० एल० तथा वेबर, जे०, J, Sci. Food Agric., 1972, **23**, 93-100.
5. जेंग, डब्ल्यू मिक्ज्वेस्थी, जे० ए० तथा ब्राउन, एल०, Cereal Chem., 1975, **47**, 72.
6. ब्लूमफील्ड, सी०, किल्सो, डब्ल्यू० आई० तथा प्रूडेन, Soil Sci., 1976, **27**, 16-31.
7. स्ट्रिकलैण्ड, आर० सी०, चने, डब्ल्यू० आर० तथा लमोरेक्स, आर० जे०, Plant and Soil, 1979, 52, 393-402.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 3, 1990

2-दूरीक समष्टियों में अनअद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय सम्बन्धी परिणाम

आर० पी० दुबे तथा एच० के० पाठक

गणित विभाग, कल्याण महाविद्यालय, भिलाई नगर (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 19, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य पूर्ण 2-दूरीक समष्टि पर आत्म कक्षकतः प्रतिरूपणों के लिए कतिपय अनअद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त करना है।

Abstract

Results on non-unique fixed point in 2-metric spaces. *By* R. P. Dubey and H. K. Pathak, Department of Mathematics, Kalyan Mahavidyalaya, Bhilainagar (M. P.)

The aim of this paper is to obtain some non-unique fixed point theorems for self orbitally continuous mappings on complete 2-metric spaces.

1. प्रस्तावना

आचारी[1] ने निम्नलिखित स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध की है जो सिरिका[3] के परिणाम से प्रेरित है।

प्रमेय *A*

माना X कक्षतः पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा T एक कक्षकतः संतत आत्म-प्रतिचित्रण है X का जिससे निम्नलिखित प्रतिबन्ध की तुष्टि होती है

$$\min \{d(Tx, Ty)\, d(x, y), d(x, Tx)\, d(y, Ty)\} - \min \{d(x, Tx)\, d(x, Ty), d(y, Ty)\, d(y, Tx)\} \leqslant qd(x, y) \min \{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

समस्त $x, y \in X$, $0<q<1$, $d(x, Tx)\neq 0$ तथा $d(y, Ty)\neq 0$ के लिए। तो प्रत्येक $x\in X$ के लिए अनुक्रम $\left\{T^n x\right\}_{n=1}^{\infty}$ अभिसारी होता है T के स्थिर बिन्दु में।

हमारा मुख्य उद्देश्य पूर्ण 2-दूरीक समष्टियों में कतिपय स्थिर बिन्दु प्रमेयों की स्थापना करना है।

टास्कोविक [7] ने सिरिक के परिणाम[3] का सार्वीकरण किया। प्रस्तुत प्रपत्र में टास्कोविक की ही प्रविधि[7] का अनुसरण करते हुए हम प्रमेय A का सार्वीकरण 2-दूरीक समष्टि में करेंगे।

गाहलेर[3] तथा व्हाइट[8] का अनुसरण करते हुए हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा 1.1

एक 2-दूरीक समष्टि एक समष्टि X है जिसमें प्रत्येक x, y, z बिन्दुओं के त्रिकः के लिए एक वास्तविक मान वाला फलन $d(x, y, z)$ पाया जाता है जिससे कि

(i) X में स्पष्ट बिन्दुओं x, y के प्रत्येक युग्म के लिए X में एक बिन्दु z ऐसा होता है कि $d(x, y z)\neq 0$

(ii) $d(x, y, z)=0$, जब x, y, z में से कम से कम दो समान हों।

(iii) $d(x, y, z)=d(y, z, x)=d(x, z, y)$,

(iv) $d(x, y, z)\leqslant d(x, y, w)+d(x, w, z)+d(w, y, z)$ X में समस्त w के लिए।

यह स्पष्ट है कि d अनृण है।

परिभाषा 1.2

2-दूरीक समष्टि (x, d) में अनुक्रम $\{x_n\}$ को कौशी-अनुक्रम कहते हैं यदि

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n, a)=0$$

X में समस्त a के लिए।

परिभाषा 1.3

एक 2-दूरीक समष्टि (X, d) पूर्ण कहलाता है यदि X में प्रत्येक कौशी-अनुक्रम अभिसारी हो।

परिभाषा 1.4

माना $T: X\to X$ यदि समस्त $a\in X$, $d(T^{ni}x, u, a)\to 0$ के लिए ज्यों ज्यों $i\to\infty$ का अर्थ है $d(TT^{ni}x, Tu, a)\to 0$ ज्यों ज्यों $i\to\infty$, तो T कक्षकतः संतत कहलाता है।

अब हम सिंह की प्रमेयिका का[6] उपयोग करेंगे।

प्रमेयिका 1.

मानाकि $\{x_n\}$ एक अनुक्रम है जो पूर्ण 2-दूरीक समष्टि X में है। यदि $h\in(0, 1)$ का अस्तित्व हो जिससे कि

$$d(x_n, x_{n+1}, a)\leqslant hd(x_{n-1}, x_n, a)$$

समस्त n के लिए तथा $a\in X$, तो $\{x_n\}$ X में एक बिन्दु में अभिसारी होता है।

2. मुख्य परिणाम

हम निम्नलिखित की स्थापना करेंगे :

प्रमेय 1.

माना कि T एक कक्षकतः संतत प्रतिचित्रण है पूर्ण 2-दूरीक समष्टि X का ही जिससे निम्न की तुष्टि होती है

$$\alpha_1 d(Tx, Ty, a)\, d(x, y, a)+\alpha_2 d(x, Tx, a)\, d(y, Ty, a)$$
$$-\min\{d(x, Tx, a)d(x, Ty, a), d(y, Ty, a)\, d(y, Tx, a\}$$
$$\leqslant\beta d(x, y, a)\min\{d(x, Tx, a)\, d(y, Ty, a)\} \tag{2.1}$$

समस्त $x, y, a\in X$, $d(x, Tx, a)\neq 0$ के लिए तथा $d(y, Ty, a)\neq 0$, जहाँ α_1 α_2 एवं β, $\alpha_1+\alpha_2>\beta$ तथा $\beta-\alpha_2\geqslant 0$.के साथ वास्तविक संख्या है तो प्रत्येक $x\in X$, के लिए अनुक्रम $\{T^n x\}$ T के स्थिर बिन्दु में अभिसारी होता है।

उपपत्ति

माना $x_0\in X$ कि एक यादृच्छिक बिन्दु है और अनुक्रम $\{x_n\}$ को

$$x_0=x,\ x_1=Tx_0,\ldots x_n=Tx_{n-1},\ n=1, 2, 3\ldots \tag{2.2}$$

द्वारा परिभाषित करता है।

यदि कोई $n\in N$, $x_n=x_{n+1}$ तो इससे यह निकलता है कि $\{x_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है। अतः हम कल्पना कर सकते हैं कि $x_n\neq x_{n+1}$ प्रत्येक $n=0, 1, 2\ldots$. के लिए। $x=x_{n-1}$ तथा $y=x_n$ के लिए (2.1) का सम्प्रयोग करने पर

$$\alpha_1 d(x_n, x_{n+1}, a)\, d(x_{n-1}, x_n, a)+\alpha_2 d(x_{n-1}, x_n, a)\, d(x_n, x_{n+1}, a)$$
$$-\min\{d(x_{n-1}, x_n, a)\, d(x_n, x_{n+1}, a), d(x_n, x_{n-1}a, a)\, d(x_n, x_n, a)\}$$
$$\leqslant\beta d(x_{n-1}, x_n, a)\min\{d(x_{n-1}, x_n, a), d(x_n, x_{n+1}, a)\}$$

अर्थात्

$$d(x_n, x_{n+1}, a) \leqslant \frac{\beta}{(\alpha_1+\alpha_2)} \min \{d(x_{n-1}, x_n, a), d(x_n, x_{n+1}, a)\}$$

$$= h \min \{d(x_{n-1}, x_n, a), d(x_n, x_{n+1}, a)\},$$

जहाँ

$$h=\beta/(\alpha_1+\alpha_2)<1.$$

अब यदि $d(x_{n-1}, x_n, a)$ न्यूनतम हो तो

$$d(x_n, x_{n+1}, a) \leqslant h d(x_{n-1}, x_n, a)$$

और यदि $d(x_n, x_{n+1}, a)$ न्यूनतम हो तो

$$d(x_n, x_{n+1}, a) \leqslant h d(x_n, x_{n+1}, a)$$

जो विरोधाभास है क्योंकि $h<1$.

हमें प्राप्त है

$$d(x_n, x_{n+1}, a) \leqslant h d(x_{n-1}, x_n, a) \tag{2.3}$$

अब (2.3) समस्त $a \in X$ के लिए सत्य है। अतः प्रमेयिका के अनुसार अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी बिन्दु $u \in X$ में अभिसारी होता है। तो समस्त $a \in X$ के लिए

$$\lim_{n \to \infty} d(T^n x, u, a)=0$$

चूँकि T कक्षकतः संतत है अतः

$$\lim_{n \to \infty} d(T^{n+1}x, Tu, a)=0 \text{ समस्त } a \in X \text{ के लिए}$$

2-दूरीक समष्टि की परिभाषा से, हमें

$d(u, Tu, a) \leqslant d(u, Tu, T^{n+1}x)+d(n, T^{n+1}x, a)+d(T^{n+1}x, Tu, a) \not\to 0$ ज्यों ज्यों $d \to \infty$ प्राप्त होता है। अतः $d(u, Tu, a)=0$ समस्त $a \in X$ के लिए। अतः u स्थिर बिन्दु है T का।

इसके बाद हम प्रमेय 1 को प्रतिचित्रण के युग्म के लिए बिस्तीर्ण करते हैं।

प्रमेय 2

माना कि X पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है और T_1 तथा T_2 दो स्वेच्छ संतत आत्म प्रतिचित्रण हैं X के जिनसे निम्नलिखित की तुष्टि होती है:—

$$\alpha_1 d(T_1x, T_2y, a)\, d(x, y, a)+\alpha_2 d(x, T_1x, a)\, d(y, T_2y, a)$$

$$-\min \{d(x, T_1x, a)\, d(x, T_2y, a), d(y, T_2y, a)\, d(y, T_1x, a)\}$$

$$\leqslant \beta d(x, y, a) \min \{d(x, T_1x, a), d(y, T_2y, a)\} \tag{2.4}$$

समस्त $x, y, a \in X$, $d(x, T_1x, a) \neq 0$ के लिए तथा $d(y, T_2y, a) \neq 0$, जहाँ α_1, α_2, प्रमेय 1 की ही तरह हैं। तब T_1 तथा T_2 में एक उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति

मानाकि $x_0 \in X$ यादृच्छिक बिन्दु है तो हम अनुक्रम को निम्नवत् परिभाषित करते हैं—

$$x_{2n+1} = T_1 x_{2n},\ x_{2n+2} = T_2 x_{2n+1},\ n \geqslant 0.$$

तो (2.4) से हमें

$$\alpha_1 d(T_1x_{2n}\ T_2x_{2n+1}, a)\ d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) + \alpha_2 d(x_{2n}, T_1x_{2n}, a)\ d(x_{2n+1}, T_2x_{2n+1}, a)$$
$$-\min \{d(x_{2n}, T_1x_{2n}, a)\ d(x_{2n}, T_2x_{2n+1}, a), d(x_{2n+1}, T_2x_{2n+1}, a)\ d(x_{2n+1}, T_1x_{2n}, a)\}$$
$$\leqslant \beta d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \min \{d(x_{2n}, T_1x_{2n}, a), d(x_{2n+1}, T_2x_{2n+1}, a)\}$$

अर्थात् $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \leqslant \dfrac{\beta}{(\alpha_1+\alpha_2)} \min \{d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)\ d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)\}$

$$= h \min \{d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)\ d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)\}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$h = \frac{\beta}{\alpha_1+\alpha_2} < 1.$$

अब यदि $d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)$ न्यूनतम हो तो

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \leqslant h d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)$$

और यदि $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)$ न्यूनतम हो तो

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \leqslant h d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)$$

जो विरोधाभास है क्योंकि $h<1$. अतः हमें

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \leqslant h d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \qquad (2.5)$$

प्राप्त होता है। अब (2.5) समस्त $a \in X$ के लिए लागू है। अतः प्रमेयिका के अनुसार अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी $u \in X$ में अभिसारी होता है।

चूँकि T_1 द्वारा T_2 कक्षकतः संतत हैं अतः $\lim_{n\to\infty} d\left(T_1^{2n+1}x, Tu, a\right) = 0$ तथा

$\lim_{n\to\infty} d\left(T_2^{2n+2}x, T_2u, a\right) = 0$ समस्त $a \in X$ के लिए।

2-दूरीक समष्टि की परिभाषा से हमें प्राप्त है

$$d(u, T_1u, a) \leqslant d\left(u, T_1u, T_1^{2n+1}x\right) + d\left(u, T_1^{2n+1}x, a\right) + d\left(T_1^{2n+1}x, T_1u, a\right)$$

जो $\to 0$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$, फलस्वरूप $d(u, T_1 u, a)=0$ का अर्थ है कि $T_1 u=u$. इसी तरह $T_2 u=u$. अतः u है T_1 तथा T_2 का उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु है ।

टिप्पणी

यदि $T_1=T_2$ मान लिया जाय तो प्रमेय 1, प्रमेय 2 की विशिष्ट दशा ।

निर्देश

1. आचारी, जे०, Publ. Inst. Math. 1979, **26** (40), 5-9.
2. सिरिक, एल० जे०, Publ. Inst. Math. 1974, T17 (13), 52-58.
3. गाहलेर, एस०, Math. Nachr, 1963, **26**, 115-148.
4. वही, Roumaine Math. Pures Appl., 1966, **11**, 665-667.
5. वही, Math. Nachr, 1965, 28, 235-244.
6. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes, 1979, **7**, 1-11.
7. टास्कोविक, एम० पी०, Publ. Inst. Math., 1967, **20** (34), 231-242.
8. व्हाइट, ए० जी०, Math. Nachr, 1969, **42**, 43-60.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

Editor
Dr. Chandrika Prasad
D. Phil.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 October 1990 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद्

विषय-सूची

1. उभयनिष्ठ बिन्दु सम्बन्धी परिणाम

रवि डाबर ... 207

2. त्रिकोणमितीय कोटिज्याओं, बेसेल फलनों, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा फाक्स के H-फलन वाले कुछ सूत्र

साधना मिश्रा ... 215

3. प्रदूषकों की दीर्घकालिक अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का मूंग की फसल पर प्रभाव

शिव गोपाल मिश्र तथा प्रमोद कुमार शुक्ल ... 227

4. मटर में उत्पादन से सम्बन्धित विभिन्न पौध गुणों के बीच सह-सम्बन्धता सम्बन्धी अध्ययन

महेन्द्र प्रताप चौहान तथा उदल सिंह संतोषी ... 235

5. ऐसीटोनाइट्राइल में N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन का पोलैरोग्राफीय अपचयन

मीना भारतीय तथा यू० एस० चतुर्वेदी ... 239

6. ऐरिल आक्सीऐल्केन कार्बोक्सिलिक अम्ल एस्टरों का संश्लेषण एवं उनकी जैव सक्रियता

जया चौहान, सन्तोष कुमार तथा जे० एस० चौहान ... 245

7. शोरिया रोब्यूस्टा के रासायनिक संघटन एवं सेल्यूलोसी पॉलिसैकराइड शर्कराओं का विश्लेषणात्मक अध्ययन

आर० एन० शुक्ला, पी० एस० शर्मा तथा आर० एम० श्रीवास्व ... 253

8. गोबर की खाद (F. Y. M.) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (M. R. P.) की उपस्थिति में वाहित मल-जल का उपयोग

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि ... 263

9. प्रतिपादन-पूर्व स्थित आँकड़ों पर बी० ई० टी० समीकरण की अनुप्रयोज्यता

जगदीश प्रसाद तथा कान्ति प्रसाद ... 269

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

उभयनिष्ठ बिन्दु सम्बन्धी परिणाम

रवि डावर

गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हुसैन तथा सहगल के परिणाम को विस्तीर्ण करना है। इसमें अर्द्धसंतता दशा पर विचार करते हुए प्रमेय को तीन फलनों के लिये सिद्ध किया गया है।

Abstract

Result on common fixed points. *By* Ravi Dawar, Department of Mathematics, Vikram University, Ujjan (M. P.)

The aim of this paper is to extend a result of Hussain and Sehagal (1975). The condition that the function should be continuous in Husain and Sehagal, is replaced by a semicontinuity condition. Moreover, the theorem has been proved for three functions and a different proof is given. This result is also true upto nine functions.

1. माना (X, d) एक दूरीक अवकाश है। प्रतिचित्रण $f: X \to X$ को संकुचन कहा जाता है यदि

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y) \forall x, y \in X, 0 \leqslant k < 1 \tag{1}$$

सुविदित बानाख संकुचन सिद्धान्त का कथन है कि f पूर्ण दूरीक अवकाश X पर संकुचन है तो प्रत्येक अनुक्रम $\{f^n(x_0)\} f$ के एक असाधारण स्थिर बिन्दु में अभिसारी होता है।

कानन[1] ने उपर्युक्त सिद्धान्त के सदृश्य ही एक सिद्धान्त की स्थापना की और निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया—

प्रमेय (A)

माना कि f एक प्रतिचित्रण है जिसे पूर्ण दूरीक अवकाश X के लिये इस तरह परिभाषित किया जाता है कि—

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \forall\, x,\ y \in X,\ 0 \leqslant \alpha < \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

तब f का असाधारण बिन्दु स्थिर होता है। जैमफिरेस्कु[2] ने भी एक प्रतिचित्रण के स्थिर बिन्दु के अस्तित्व हेतु पर्याप्त प्रतिबन्ध स्थापित किया है जिनसे निम्नलिखित की तुष्टि होती है—

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \beta[d(x, f(y)) + d(y), f(x))] \forall\, x,\ y \in X,\ 0 \leqslant \beta < \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

प्रतिचित्रण $f : X \to X$ को संकुचित कहा जाता है यदि

$$d(f(x), f(y)) < d(x,\ y) \forall\, x,\ y \in X,\ x \neq y \tag{4}$$

एल्डेस्टीन[3] ने बानाख संकुचन सिद्धान्त को अधिक सामान्य प्रतिचित्रण के लिये सार्वीकृत बनाया और निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया।

प्रमेय (B)

संकुचित प्रतिचित्रण f का अद्वितीय स्थिर बिन्दु z होता है यदि कोई $x_0 \in X$ और $\{f^n(x_0)\}$ का सीमा बिन्दु है।

तत्पश्चात् सिंह[4] ने संकुचनशील प्रतिचित्रण के लिये निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय (C)

मानाकि f एक प्रतिचित्रण है जो X पर इस तरह परिभाषित है कि

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \tfrac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \forall\, x,\ y \in X,\ x \neq y \tag{5}$$

तो f का एक असाधारण बिन्दु z है यदि किसी $x_0 \in X$ के लिये z सीमा बिन्दु है अनुक्रम $\{f^n(x_0)\}$ का। इसकी पुनरावृत्ति तथा प्रस्तुत प्रसंग में $f^n(x_0) \to z$.

प्रतिचित्रणों के अनुक्रम हेतु उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दुओं के अध्ययन का सूत्रपात नैडलर[5] के कार्य से हुआ और बाद में अन्य लोगों ने अध्ययन किया। हुसैन तथा सहगल[6] ने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया।

प्रमेय (D)

यदि (X, d) एक पूर्ण दूरीक अवकाश हो तथा माना कि S तथा T स्वयं प्रतिचित्रण है X के। कल्पना किया कि एक संतत $\phi \in \psi$ है जिससे समस्त $x,\ y \in X$ के लिये

$$d(S(x), T(y)) \leqslant \phi[d(x, y))\ d((x, S(x)), d(x, T(y)),\ d(y, S(x)), d(y, T(z))] \qquad (1)$$

जहाँ ϕ किसी $t<0$ के लिये प्रतिबंध की तुष्टि करता है।

$$\phi(t, t, a_1 t, a_2 t, t<t, \text{ जहाँ } a_1+a_2=3 \qquad (2)$$

तो एक $z\epsilon X$ ऐसा होता है कि Z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का।

इस शोधपत्र में पर्याप्त दुर्बल अवस्थाओं के लिये उपर्युक्त प्रमेय सिद्ध किया गया है। हम निम्नलिखित को सिद्ध करेंगे :—

प्रमेय 1

माना (X, d) एक पूर्ण दूरीक अवकाश है और $f_1 f_2 f_3$ तथा $f_3 f_2 f_1$, X के स्वयं प्रतिचिण है जिससे $f_1 f_2 f_3$ तथा $f_3 f_2 f_1$ संतत है। कल्पना किया कि $\phi\epsilon\psi$ का इस प्रकार अस्तित्व है कि समस्त $x, y\epsilon X$ के लिये

$$d(f_1 f_2 f_3 (x), f_3 f_2 f_1 (x)) \leqslant \phi[d(x, y), d(x, f_1 f_2 f_3 (x), d(x, f_3 f_2 f_1 (y)),$$
$$d(y, f_1 f_2 f_3(y)), d(y, f_3 f_2 f_1 (y)] \qquad (1.1)$$

कतिपय $x_0\epsilon X$ के लिये अनुक्रम $\{x_n\}$ जिसे

$$x_n = \begin{cases} f_1 f_2 f_3 (x_{n-1}) \text{ यदि } n \text{ विषम हो} \\ f_3 f_2 f_1 (x_{n-1}) \text{ यदि } n \text{ सम हो} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ ϕ किसी $t>0$ के लिये प्रतिबंध की तुष्टि करता है :

$$\phi(t, t, a_1 t, a_2 t, t) \leqslant t, \qquad \text{जहाँ} \quad a_1+a_2=3 \qquad (1.2)$$

तो एक $z\epsilon X$ ऐसा होता है कि Z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है $f_1 f_2 f_3$ तथा $f_3 f_2 f_1$ का।

हमें प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी।

माना R^+ समस्त अनृण वास्तविकों के समुच्चय को बताने वाला है। मानाकि प्रतिचित्रण ψ ऐसे परिवार को सूचित करता है जिसके कि $\phi\epsilon\psi$, $\phi : (R^+)^5 \to R^+$ तथा ϕ ये प्रत्येक कोट्यांक अचर में ऊपरी अर्द्धसंतत तथा अह्रासमान हैं। अपरंच, माना

$$\gamma(t) = \phi(t, t, a_1 t, a_2 t, t)$$

जहाँ γ फलन है $\gamma : R^+ \to R^+$, जहाँ $a_1+a_2=3$

प्रमेयिका 1 :

प्रत्येक $t>0$ के लिये यदि $\gamma(t)<t$ यदि

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t)=0$$

उपपत्ति

(आवश्यकता) चूँकि ϕ ऊपरी अर्द्ध संतत है तब γ ऊपरी अर्द्ध संतत है। कल्पना कीजिये कि—

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t)=A$$

जहाँ $A\neq 0$ तब

$$A=\lim_{n\to\infty} \gamma^{n+1}(t) \leqslant \gamma \lim_{n\to\infty} \gamma^n(t)=\gamma(A)<A$$

अर्थात् $A<A$, विरोध है। इसलिये $A=0$

(पर्याप्तता) चूंकि ϕ अह्रासमान है तो γ अह्रासमान है। दिया हुआ है

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t)=0,$$

मानाकि

$\gamma(t)>t$ किसी $t>0$ के लिये तो

$\gamma^n(t)>t$ किसी $t>0$ के लिये $n=1, 2, 3,...$पर इस तरह $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) \nrightarrow 0$, विरोध है।

अपरंच, यदि $\gamma(t)=t$ किसी $t>0$ के लिये तो

$$\lim_{n\to 0} \gamma^n(t) \nrightarrow 0$$

अतः समस्त $t>0$ के लिये $\gamma(t)<t$

प्रमेय की उपपत्ति

$\because \gamma(t)=\phi(t, t, t, 2t, t)<t$

तो प्रमेयिका 1 से $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t)=0$। अब माना कि $x_0\in X$ कोई बिन्दु है तो $\{x_0\}$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :—

$$x_1=f_1 f_2 f_3 (x_0),\ x_2=f_3 f_2 f_1(x_1),\ x_3=f_1 f_2 f_3 (x_2)...x_{2n}=f_3 f_2 f_1(x_{2n-1}),$$
$$x_{2n+1}=f_1 f_2 f_3 (x_{2n})\text{.....}$$

हम दावा करते हैं

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_0, x_1)$$

कल्पना किया कि

$$d(x_0, x_1) < d(x_1\, x_2)$$

तो त्रिकोणीय असमिका का प्रयोग करने पर

$$(dx_0, x_2) < 2d\,(x_1, x_2)$$

माना $\gamma = d(x_1, x_2)$ तो

$$\gamma \leqslant \phi[d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), d(x_1, x_1), d(x_0, x_2), d(x_0, x_1)] < \phi(\gamma, \gamma, \gamma, 2\gamma, \gamma)$$

प्रतिबंध (1.2) से

$$\phi(\gamma, \gamma, \gamma, 2\gamma, \gamma) < \gamma$$

तथा इस प्रकार $\gamma < \gamma$ विरोध है ।

अतएव

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_0, x_1)$$

तथा

$$d(x_1\, x_2) \leqslant \phi[d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), 0, 2d(x_0, x_1), d(x_0, x_1)] \leqslant \gamma d(x_0, x_1)$$

इसी प्रकार

$$d(x_2, x_3) \leqslant \gamma[(d(x_1, x_2)] \leqslant \gamma^2[d(x_0, x_1)]$$

एवं सामान्यतया

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \gamma^n[d(x_0, x_1)]$$

$\because$ $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) = 0$ के लिए $t < 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{1.3}$$

यह दिखलाने के लिये कि $\{x_n\}$ कोशी है यह पर्याप्त होगा कि $\{x_{2n}\}$ कोशी है ।

मानाकि $\{x_{2n}\}$ कौशी अनुक्रम नहीं है । तब एक $\epsilon > 0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णाङ्क $2k, k \in I^+$ के लिये $2k \leqslant 2n(k) < 2m(k)$ बाले पूर्णाङ्कों $2n(k)$ तथा $2m(k)$ का अस्तित्व होता है कि

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)} < \epsilon \tag{1.4}$$

मानाकि प्रत्येक पूर्णाङ्क $2k$, $k \in I^+$, $2m(k)$ के लिये सबसे छोटा पूर्णाङ्क $2n(k)$ से अधिक है और (1.4) की तुष्टि करता है । अर्थात्

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}) \leqslant \epsilon$$

तथा

$$d(x_{2n(k)}(x_{2m(k)}) > \epsilon \tag{1.5}$$

तो प्रत्येक पूर्णाङ्क $2k$, $k\in I^+$ के लिये, माना

$$d_n=d(x_n, x_{n+1})$$

$$\epsilon<d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})\leqslant d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}+d_{2md(k)-2+2m(k)-1}$$

(1.3) एवं (1.4) से

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})\to\epsilon \text{ ज्यों-ज्यों } k\to\infty \tag{1.6}$$

त्रिकोणीय असमिका से यह अनुसरित होता है कि

$$|d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})-d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}|\leqslant d_{2m(k)-1}$$

तथा

$$|d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1})-d(x_{2n}(k), x_{2m(k)}|\leqslant d_{2m(k)-1}+d_{2n(k)}$$

(1.6) से ज्यों-ज्यों $k\to\infty$

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})\to\epsilon$$

तथा

$$d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1}\to\epsilon$$

अब मानाकि

$$P(2k)=d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}),$$

$$q(2k)=d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})$$

तथा

$$r(2k)=d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1})$$

तो

$$P(2k)\leqslant d_{2n(k)}+d(f_1f_2f_3(x_{2n(k)}, f_3f_2f_1(x_{2m(k)-1}))$$

(1.1) से

$$p(2k)<d_{2n(k)}+\phi(q(2k), d_{2n(k)}, p(2k), r(2k), d_{2m(k)-1})$$

चूंकि ϕ उच्चतर अर्द्धसंतत है ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ इससे यह अर्थ निकला कि—

$$\epsilon\leqslant\phi(\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, 0)\leqslant\phi(\epsilon, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon, \epsilon)$$

जो विरोध है अतएव $\{x_{2n}\}$ कोशी अनुक्रम है अतः पूर्णता के फलस्वरूप एक ऐसा $z\in X$ है कि $x_n\to z$. हम दिखलाते हैं कि z उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है $f_1f_2f_3$ तथा $f_3f_2f_1$ का। चूंकि $\{x_n\}$ अभिसारी होता है z तक अतएव $\{x_{2n}\}$ तथा $\{x_{2n+1}\}$ दोनों z तक अभिसारी हैं।

माना

$$d(f_1f_2f_3(z), z)=\epsilon>0$$

इस प्रकार $n\geqslant N$ के लिये

$$d(z_{2n}, z)<\frac{\epsilon-\gamma(\epsilon)}{4} \text{ तथा } d(x_{2n}, x_{2n+1})\leqslant\frac{\epsilon-\gamma(\epsilon)}{4}$$

अतएव त्रिकोणीय असमिका का उपयोग करने पर

$$d(z, x_{2n-1}) \leqslant d(z, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n-1}) < \frac{\epsilon - \gamma(\epsilon)}{4} + \frac{\epsilon - \gamma(\epsilon)}{4}$$

$$= \frac{\epsilon - \gamma(\epsilon)}{2}$$

अर्थात्

$$d(z, x_{2n-1}) < \epsilon \tag{1.7}$$

त्रिकोणीय असमिका का प्रयोग करने तथा (1.7) से

$$d(x_{2n-1}, f_1 f_2 f_3(z)) \leqslant d(x_{2n-1}, z) + d(z, f_1 f_2 f_3) < \epsilon + \epsilon \tag{1.8}$$

अर्थात्

$$d(x_{2n-1}, f_1 f_2 f_3(z)) < 2\epsilon$$

अब

$$\epsilon = d(f_1 f_2 f_3(z), z) \leqslant d(f_1 f_2 f_3(z), f_3 f_2 f_1(x_{2n-1})) + d_{2n} + d(x_{2n+1}, z)$$

(1.1) के द्वारा

$$\epsilon \leqslant \phi[d((zx_{2n-1}), d(z. f_1 f_2 f_3(z)), d(z, x_{2n}), d(x_{2n-1}, f_1 f_2 f_3(z)), d_{2n-1}] + d_{2n} + d(x_{2n+1}, z)$$

(1.7) एवं (1.8) से

$$\epsilon \leqslant \phi(\epsilon, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon) + \frac{\epsilon + \gamma(\epsilon)}{4} + \frac{\epsilon - \gamma(\epsilon)}{4}$$

अर्थात्

$$\epsilon \leqslant \gamma(\epsilon) + \frac{\epsilon - \gamma(\epsilon)}{2} = \frac{\gamma(\epsilon) + \epsilon}{2}$$

$\because$ $\gamma(\epsilon) < \epsilon$ तो

$\frac{\gamma(\epsilon) + \epsilon}{2} < \epsilon$ यदि $\epsilon < \epsilon$ विरोध है।

$$\therefore z = f_1 f_2 f_3(z)$$

इसी प्रकार

$$z = f_3 f_2 f_1(z)$$

अभी यह दिखाना है कि z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है। माना $z \neq y$ दो उभयनिष्ठ स्थिर विन्दु है $f_1 f_2 f_3$ एवं $f_2 f_2 f_1$ के। तो

$$d(z, y) = d(f_1 f_2 f_3(z), f_3 f_2 f_1(y)) \leqslant \phi[d(z, y), d(z, f_1 f_2 f_3(y)),$$
$$d(z, f_3 f_2 f_1(y)), d(y, f_1 f_2 f_3(z), d(y, f_3 f_2 f_1(y))]$$

$$\leqslant \phi[d(z, y)\, 0, d(z, y), d(x, y), 0] < v[d(z, y] < d(z, y)$$

इसलिये $z=y$ तथा $f_1 f_2 f_3$ एवं $f_3 f_2 f_1$ में अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

टिप्पणी

यह परिणाम नौ फलनों तक के लिये सत्य है एवं इसमें ϕ गुणोत्तर माध्यम के घात के रूप में कार्य करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री सुशील शर्मा का आभारी हैं जिन्होंने शोध-पत्र लेखन में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. कानन, आर०, Bull. Cal. Math. Soc., 1968, **60**, 71-76.
2. जैमफिरेस्कु, बी०, Arch. Math., 1972, **23**, 292-98.
3. एल्डेस्टीन, एम०, J. Lond. Math. Soc., 1962, **37**, 74.
4. सिंह, एस० पी०, Yokohama Math. J., 1970, **18**, 23-25.
5. नैडलर, सैम बी०, Pacific J. Math., 1968, **27**, 579-585.
6. हुसैन, एस० ए० तथा सहगल, वी० एम०, Bull. Aust. Math. Soc., 1975, **13**, 261-267.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

त्रिकोणमितीय कोटिज्याओं, बेसेल फलनों, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा फाक्स के H-फलन वाले कुछ सूत्र

साधना मिश्रा

सिविल इंजीनियरी विभाग, विद्याभवन सरल इंस्टीट्यूट, उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—मई 17, 1990]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में त्रिकोणमितीय कोटिज्याओं, बेसेल फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा फाक्स के H-फलन वाले एक समाकल का मूल्यांकन किया है और इसका उपयोग एक द्विगुण समाकल का मान निकालने के लिए किया गया है जिसमें त्रिकोणमितीय कोटिज्यायें, बेसेल फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा H-फलन निहित हैं।

Abstract

Some formulae involving trigonometric cosines, Bessel functions, generalized hypergeometric series and Fox's H-function. By Sadhana Mishra, Department of Civil Engineering, Vidya-Bhawan, Rural Institute, Udaipur.

In this paper, we have evaluated an integral involving trigonometric cosine, Bessel function, generalized hypergeometric series and Fox's H-function, and employed it to evaluate one double integral involving trigonometric cosines, Bessel functions, generalized hypergeometric series and the H-function. We have further utilized the integral to establish one Fourier-Bessel series and one double Fourier-Bessel series for the products of generalized hypergeometric functions and trigonometric cosines.

प्रसार सूत्रों तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों का विषय विशिष्ट फलनों के साहित्य में प्रमुख स्थान ग्रहण करता है।

अभी तक सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफलों के लिए एकाकी तथा बहुगुण फूरियर बेसेल श्रेणी स्थापित करने का प्रयास नहीं हुआ। प्रस्तुत प्रपत्र इस दिशा में सर्वप्रथम प्रयास है।

इस प्रपत्र में प्राप्त किये गये परिणाम सामान्य लक्षण वाले हैं और इसके कई रोचक दशाओं पर विचार हो सकता है। हमारे परिणामों से माइजर के G-फलन, मैकराबार्ट के E-फलन, हाइपर ज्यामितीय फलनों, बेसेल फलनों, लेगेण्ड्र फलनों, व्हिटेकर फलनों, लाम्बिक बहुपदों, त्रिकोणमितीय फलनों एवं अन्य सम्बद्ध फलनों के लिए तमाम परिणाम व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

यह ध्यान रखना अत्यन्त महत्वपूर्ण है कि अवकलन तथा समाकलन जैसी संक्रियाओं को मूल फलनों की अपेक्षा H-फलन पर आसानी से सम्पन्न किया जा सकता है, यद्यपि दोनों समतुल्य हैं।

फाक्स द्वारा प्रवर्तित H-फलन [4, p. 408] को निम्नवत् प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा—

$$H_{p,\,q}^{u,\,v}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right]=H_{p,\,q}^{n,\,v}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1, e_1),\ldots,(a_p, e_p)\\(b_1, f_1),\ldots,(b_q, f_q)\end{matrix}\right] \tag{1.1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L x(s)z^s ds,$$

जहाँ L उपयुक्त बार्नीज कंटूर है तथा

$$x(s)=\frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(b_j-f_j s)\prod_{j=1}^{v}\Gamma(1-a_j+e_j s)}{\prod_{j=u+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j s)\prod_{j=v+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j s)}$$

ब्राक्समा[1] ने H-फलन के उपगामी प्रसार तथा वैश्लेषिक सांतत्य दे रखा है।

उपपत्तियों में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी—

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\cos wx J_m(wx)\,{}_PF_Q\left[\begin{matrix}\alpha_P;\\ \beta_Q\end{matrix} cx^{2h}\right]dx \tag{1.2}$$

$$=\frac{2^{m-1}}{w^\sigma}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_P)_r\, c^r\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma-2hr)\,\Gamma\left(\frac{m+\sigma}{2}+hr\right)w^{-2hr}}{(\beta_Q)_r\, r!\,\Gamma\left(\frac{1-m-\sigma}{2}-hr\right)\Gamma(1+m-\sigma-2hr)},$$

जहाँ α_p सूचक है $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ का; h एक धन पूर्णांक है; $P<Q$ (या $P=Q+1$ तथा $|c|<1$); β_Q में से कोई भी शून्य या ऋण पूर्णाङ्क नहीं है;

$$\mathrm{Re}(\sigma+m)>0,\ \mathrm{Re}\ \sigma-2h \max_{1\leqslant j\leqslant p}[\mathrm{Re}\ \alpha_j]<\tfrac{1}{2},\ w>0.$$

समाकल (1.2) को सरलता से स्थापित किया जा सकता है यदि हम सार्वीकृत हाइपर-ज्यामितीय श्रेणी को [2, p. 181, (1)] के रूप में व्यक्त करें, तथा इस प्रक्रम में निहित समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करें तथा [3, p. 328, (11)]की सहायता से समाकलन का मान निकालें तो

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\cos wx\ J_m(wx)\,{}_pF_Q\left[\begin{matrix}\alpha_P;\ cx^{2h}\\ \beta_Q\end{matrix}\right]U\,F_V\left[\begin{matrix}\gamma_U;\ dx^{2k}\\ \delta_V\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2^{m-1}}{w^\sigma}\sum_{r,t=0}^{\infty}\frac{(\alpha_P)_r\,c^r(\gamma_U)_t\,d^t\,\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma-2hr-2kt)\,\Gamma\left(\frac{m+\sigma}{2}+hr+kt\right)w^{-2(hr+kt)}}{(\beta_Q)_r\,r!(\delta_V)_t\,t!\,\Gamma\left(\frac{1-m-\sigma}{2}-hr-kt\right)\Gamma(1+m-\sigma-2hr-2kt)},$$

जहाँ पर (1.2) प्रतिबन्धों तथा संकेतनों के अतिरिक्त k एक धनात्मक पूर्णाङ्क हैं; $U<V$(या $U=V+1$ तथा $|d|<1$); δ_V में से कोई भी शून्य या ऋण पूर्णाङ्क नहीं है तथा

$$\mathrm{Re}\ \sigma-2h \max_{1\leqslant j\leqslant P}[\mathrm{Re}\ \alpha_j]-2k \max_{1\leqslant j\leqslant U}[\mathrm{Re}\ \gamma_j]<\tfrac{1}{2}.$$

(1.3) व्युत्पन्न करने के लिए हम UF_V, के श्रेणी निरूपण का प्रयोग करते हैं, समाकलन तथा संकलन के क्रम का परस्पर विनिमय कराते हैं और इस प्रकार से प्राप्त समाकलन का मान (1.2) की सहायता से निकालते हैं।

टिप्पणी 1

उपर्युक्त विधि के प्रयोग से n सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणियों के गुणनफल के लिए (1.2) जैसा ही समाकलन प्राप्त करते हैं।

बेसेल फलनों का लाम्बिकता गुणधर्म [5, p. 291, (6)].

$$\int_0^\infty x^{-1}\,J_{v+2n+1}(x)\,J_{v+2m+n_1}(x)\,dx \tag{1.4}$$

$$=\begin{cases}0, \text{ यदि } m\neq n;\\ (4n+2\gamma+2)^{-1}, \text{ यदि } m=n,\ Re\gamma+m+n>-1.\end{cases}$$

संक्षेपण की दृष्टि से, आगे जो कुछ कहा गया है, इस अनुभाग में इसके पूर्ण दिये गये संकेतनों के अतिरिक्त λ तथा μ धनात्मक संख्यायें हैं तथा

$$\phi(r)=\frac{(\alpha_P)_r\, c^r}{(\beta_Q)_r\, r!}\,;\ \psi(t)=\frac{(\gamma_U)_t\, dt}{(\delta_V)_t\, t!}\,;$$

$$F_1(x)={}_PF_Q\left[\begin{matrix}\alpha_P;\\ \beta_Q\end{matrix}\ cx^{2h}\right]\,;\ F_2(x)={}_UF_V\left[\begin{matrix}\gamma_U;\\ \delta_V\end{matrix}\ dx^{2k}\right]\,;$$

$$\mathsf{H}\,(x)=\mathsf{H}_{p,\,q}^{u,\,v}\left[zx^{2\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\ (b_q,\,f_q)\end{matrix}\right]\,;$$

$$\mathsf{H}_1\,(m,\,r,\,t)=\mathsf{H}_{p+3,\,q+1}^{u+1,\,v+1}\left[\frac{z}{w^{2\lambda}}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(1-\frac{m+\sigma}{2}-hr-kt,\ \lambda\right),\ a_p,\ e_p\\ \left(\frac{1-m-\sigma}{2}-hr-kt,\lambda\right),\ (1+m-\sigma-2hr-2kt,\ 2\lambda),\\ (\tfrac{1}{2}-\sigma-2hr-2kt,\ 2\lambda),\ (b_q,\,f_q)\end{matrix}\right];$$

$$\mathsf{H}_2\,(xy)=\mathsf{H}_{p,\,q}^{u,\,v}\left[\,zx^{2\lambda}\,y^{2\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\ (b_q,\,f_q)\end{matrix}\right];$$

$$\mathsf{H}_3\,(m_1,\,m_2,\,r_1,\,t_1,\,r_2,\,t_2)$$

$$\mathsf{H}_{p+6,q+2}^{u+2,v+2}\left[\frac{z}{w^{2(\lambda+\mu)}}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(1-\frac{m_1+\sigma_1}{2}-hr_1-kt_1,\lambda\right),\ \left(1-\frac{m_2+\sigma_2}{2}-hr_2-kt_2,\ \mu\right),\ (a_p,\,e_p),\\ \left(\frac{1-m_1-\sigma_1}{1}-hr_1-kt_1,\ \lambda,\ \right),\ (1+m_1-\sigma_1-2hr_1-2kt_1,\ 2\lambda),\\ \left(\frac{1-m_2-\sigma_2}{h}-hr_2-kt_2,\ \mu\ \right),\ (1+m_2-\sigma_2-2hr_2-2k_2,\ 2\mu),\\ (\tfrac{1}{2}-\sigma_1-2hr_1-2kt_1,\ 2\lambda),\ (\tfrac{1}{2}-\sigma_2-2hr_2-2kt_2\ 2\mu),\ (b_q,\,f_q)\end{matrix}\right];$$

$$A=\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j;\ B=\sum_{j=1}^{v}a_j-\sum_{j=v+1}^{p}a_j+\sum_{j=1}^{u}b_j-\sum_{j=u+1}^{q}b_j.$$

2 (i) समाकल

जिस समाकल का मूल्यांकन किया जाता है वह निम्नवत् है—

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\cos wx J_m(wx)F_1(x)F_2(x)H(x)dx \tag{2.1}$$

$$=\frac{2^{m-1}}{w^\sigma}\sum_{r,t=0}^{\infty}\phi(r)\psi(t)(w)^{-2(hr+kt)}H_1(m,\,r,\,t),$$

जहाँ

$$A\leqslant 0,\ B>0,\ |argz|<\tfrac{1}{2}B\pi,\ Re(\sigma+m)+2\lambda \min_{1\leqslant j\leqslant u}[Re\ b_j/f_j]>0,$$

$$\text{Re}\ \sigma+2\lambda \max_{1\leqslant j\leqslant v}[\text{Re}\ (1-a_j)/e_j]-2h \max_{1\leqslant j\leqslant P}[\text{Re}\ \alpha j]-2k \max_{1\leqslant j\leqslant U}[\text{Re}\ \gamma_j]<\tfrac{1}{2},$$

तथा इसी के साथ (1.2) एवं (1.3) में दिये गये प्रतिबन्ध भी सम्मिलित हैं।

उपपत्ति

(2.1) को स्थापित करने के लिए हम समाकल्य में H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1.1) के रूप में व्यक्त करते हैं तथा समाकलों के क्रम का परस्पर विनिमय कराते हैं जो कि इस प्रक्रम में निहित समाकलों के परम अभिसरण होने के कारण वैध है तो हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L x(s)z^s\int_0^\infty x^{\sigma+\lambda s-1}\cos wx\ J_m(wx)\ F_1(x)\ F_2(x)dxds.$$

(1.3) की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मान निकालने पर

$$=\frac{2^{m-1}}{w^0}\sum_{r,t=0}^{\infty}\phi(r)\,\psi(t)\,(w)^{-2(hr+kt)}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_L x(s)\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\sigma-2hr-2kt-2\lambda s\right)\Gamma\left(\frac{m+\sigma}{2}+hr+kt+\lambda s\right)w^{-\lambda s}z^2ds}{\Gamma\left(\frac{1-m-\sigma}{2}-hr-kt-\lambda s\right)\Gamma(1+m-\sigma-2hr-2kr-2\lambda s)}.$$

अब (1.1) के सम्प्रयोग द्वारा समाकल (2.1) का मान प्राप्त होता है।

टिप्पणी 2

(2.1) के सदृश समाकल जो n सामान्यीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणियाँ, बेसिल फलन तथा H-फलन के गुणनफल से युक्त होता है; उसे टिप्पणी 1 में दिये गये परिणाम की सहायता से आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

(ii) **विशिष्ट दशाएँ**

(2.1) में $d=0$ रखने पर

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\cos wx\ J_m(wx)\ F_1(x)\ H(x)\,dx \qquad (2.2)$$

$$= \frac{2^{m-1}}{w^{\sigma}} \sum_{r=0}^{\infty} \phi(r)\,(w)^{-2hr}\, H_1(m, r, 0),$$

जो $d=0$ समेत (2.1) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(2.2) में $c=0$ रखने पर

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} \cos wx\, J_m(wx)\, H(x)dx \qquad (2.3)$$

$$= \frac{2^{m-1}}{w^{\sigma}}\, h_1(m, 0, 0),$$

जो $c=0$ समेत (2.2) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(2.3) में $w=1$, $\sigma=\mu$, $m=\nu$ रखने तथा (1.1) एवं गामा फलन के गुणन सूत्र की सहायता से सरलीकरण करने पर यह तक्षक[10] के ज्ञात फल [10, p. 94, (2.1)] में समानीत हो जाते हैं।

3. द्विगुण समाकल

हमें जिस द्विगुण समाकल का मूल्यांकन करना है वह है—

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\sigma_1-1}\, y^{\sigma_2-1} \cos wx \cos wy\, J_{m_1}(wx)\, J_{m_2}(wy)\, F_1(x)F_2(x)F_1(y)F_2(y) \qquad (3.1)$$

$$\times H_2(xy)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2^{m_1+m_2-2}}{w^{\sigma_1+\sigma_1}} \sum_{r_1, t_1=0}^{\infty} \sum_{r_2, t_2=0}^{\infty} \phi(r_1)\,\psi(t_1)\phi(r_2)\psi(t_2)$$

$$\times (w)^{-2(hr_1+kt_1+hr_2+kt_2)}\, H_3(m_1, m_2, r_1, t_1, r_2, t_2),$$

जहाँ

$$A \leqslant 0,\ B>0,\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}B\pi,\ \mathrm{Re}(\sigma_1+m_1)+2\lambda \min_{1\leqslant j\leqslant u} [\mathrm{Re}\, b_j/f_j]>0,$$

$$\mathrm{Re}\,(\sigma_2+m_2)+2\mu \min_{1\leqslant j\leqslant u} [\mathrm{Re}\, b_j/f_j]>0,\ \mathrm{Re}\,\sigma_1+2\lambda \max_{1\leqslant j\leqslant v} [\mathrm{Re}\,(1-a_j)/e_j]$$

$$-2h \max_{1\leqslant j\leqslant P} [\mathrm{Re}\, \alpha_j]-2k \max_{1\leqslant j\leqslant U} [\gamma_j]<\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,\sigma_2+2\mu \max_{1\leqslant j\leqslant v} [\mathrm{Re}\,(1-a_i)/e_j]$$

$$-2h \max_{1\leqslant j\leqslant P} [\mathrm{Re}\, \alpha_j]-2k \max_{1\leqslant j\leqslant U} [\mathrm{Re}\, \gamma_j]<\tfrac{1}{2},$$

तथा इसी के साथ (1.2) एवं (1.3) में दिये गये प्रतिबन्ध।

उपपत्ति

(3.1) की स्थापना करने के लिए (2.1) की सहायता से x-समाकल का मान निकालने तथा समाकल एवं संकलन के क्रम को परस्पर बदलने पर—

$$\frac{2^{m_1-1}}{w^{\sigma_1}} \sum_{r_1,t_1=0}^{\infty} \phi(r_1)\psi(t_1)\,(w)^{-2(hr_1+kt_1)}$$

$$\times \int_0^{\infty} y^{\sigma_2-1} \cos wy\, J_{m_2}(wy)\, F_1(y)F_2(y)$$

$$\times H_{p+3,q\times 1}^{u+1,v+1}\left[\frac{zy^{2\mu}}{w^{2\lambda}}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{m_1+\sigma_1}{2}-hr_1-kt_1,\ \lambda\right),\ (a_p, e_p),\\ \left(\frac{1-m_1-\sigma_1}{2}-hr_1-kt_1,\ \lambda\right),\ (1+m_1-\sigma_1-2hr_1-2kt_1, 2\lambda);\\ \left(\frac{1}{2}-\sigma_1-2hr_1-2kt_1,\ 2\lambda\right),\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] dy.$$

अब y-समाकल का मान निकालने के लिए (2.1) को सम्प्रयुक्त करके समाकल (3.1) का मान प्राप्त किया जाता है।

टिप्पणी 3

उपर्युक्त प्रविधि को $(n-1)$ बार सम्प्रयुक्त करने पर (3.1) के सदृश बहुगुण समाकल को प्राप्त किया जा सकता है।

(3.1) में क्रमशः $d=0$ तथा $c=0$ रखने पर हमें उपयोगी विशिष्ट दशाएँ प्राप्त होंगी।

टिप्पणी 4

इस अनुभाग के समाकलों को सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा H-फलन के गुणनफलों के लिए द्विगुण तथा बहुगुण फूरियर-बेसेल श्रेणियों की स्थापना करने के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है।

4. फूरियर-बेसेल श्रेणी

जिस फूरियर-बेसिल श्रेणी की स्थापना की जानी है वह है—

$$x^{\sigma} \cos wx\, F_1(x)\, F_2(x)H(x) \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{w^{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n N J_N(wx) \sum_{r,t=0}^{\infty} \phi(r)\psi(t)(w)^{-2(hr+kt)}\, H_1(N, r, t),$$

जहाँ $N=v+2n+1$, Re $N>0$ तथा वैधता के अन्य प्रतिबन्ध (2.1) के समान ही हैं।

उपपत्ति

(4.1) को सिद्ध करने के लिए माना कि

$$f(x)=x^{\sigma}\cos wx\, F_1(x)\, F_2(x)H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, J_{v+2n+1}(wx). \tag{4.2}$$

समीकरण (4.2) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0, \infty)$ में बद्ध विचरण वाला है।

(4.2) के दोनों पक्षों में $x^{-1}\, J_{v2m+1}(wx)$ द्वारा गुणा करने तथा 0 से ∞ तक x के प्रति समाकलन करने पर

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1}\cos wx\, J_{v+2m+1}\,(wx)\, F_1(x)F_2(x)H(x)dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\int_0^{\infty} x^{-1}\, J_{v+2m+1}\,(wx)\, J_{v+2n+1}\,(wx)dx.$$

अब (2.1) तथा (1.4) का उपयोग करने पर—

$$C_m=\frac{2^m}{w^{\sigma}} M \sum_{r,t=0}^{\infty} \phi(r)\, \psi\,(t)\,(w)^{-2(hr+kt)}\, H_1(M, r, t), \tag{4.3}$$

जहाँ

$$M=v+2m+1.$$

(4.2) तथा (4.3) से फूरियर-बेसिल श्रेणी (4.1) प्राप्त होती है।

(4.1) में क्रमशः $d=0$ तथा $c=0$ रखने पर हमें उपयोगी विशिष्ट दशाएँ प्राप्त होती हैं।

(4.1) में $c=0$, $d=0$, $\lambda=1$, $\sigma=\mu$, $m=v$ रखने पर तथा (1.1) तथा गामा फलन के लिए गुणन सूत्र की सहायता से सरलीकरण करने पर इससे तक्षक का परिणाम [10, p. 95, (3.1)] प्राप्त होता है।

5. द्विगुण फूरियर-बेसेल श्रेणी

जिस द्विगुण फूरियर-बेसेल श्रेणी की स्थापना की स्थापना की जाती है वह है—

$$x^{\sigma_1}\cos wx\, y^{\sigma_2}\cos wy\, F_1(x)\, F_2(x)\, F_1(y)H_2(xy)$$

$$=\frac{1}{w^{\sigma_1+\sigma_2}}\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} 2^{n_1+n_2}\, N_1N_2\, J_{N_1}(wx)J_{N_2}(wy)$$

$$\times\sum_{r_1,t_1=0}^{\infty}\sum_{r_2,t_2=0}^{\infty}\phi(r_1)\psi(t_1)\phi(r_2)\psi(t_2)(w)^{-2(hr_1+kt_1+hr_2+kt_2)}$$

$$\times H_3(N_1, N_2, r_1, t_1, r_2, t_2),$$

जहाँ $N_1=v_1+2n_1+1$, $N_2=v_2+2n_2+1$ तथा (3.1) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

उपपत्ति

(5.1) की स्थापना के लिए माना कि

$$f(x, y)=x^{\sigma_1}\cos wx\, y^{\sigma_2}\cos wy\, F_1(x)F_2(x)F_1(y)F_2(y)H_2(xy) \tag{5.2}$$

$$= \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} A_{n_1,n_2}\, J_{v_1+2n_1+1}(wx)\, J_{v_2+2n_2+1}(wy).$$

समीकरण (5.2) वैध है क्योंकि $f(x,y)$ संतत है और क्षेत्र $0<x<\infty$, $0<y<\infty$. में बद्ध विचरण वाला है।

श्रेणी (5.2) द्विगुण-फूरियर-बेसेल श्रेणी का एक उदाहरण है। सिद्धान्त की विवेचना में न जाकर हम (5.2) से $A_{n_1,\, n_2}$ को ज्ञात करने की एक विधि प्रदर्शित करेंगे। स्थिर x के लिए

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} A_{n_1,\, n_2}\, J_{v_1+2n_1+1}(wx)$$

केवल n_2 पर निर्भर करती है। साथ ही $0<y<\infty$ क्षेत्र में (x, y) के y में फूरियर-बेसेल श्रेणी का गुणांक होना चाहिए।

(5.2) के दोनों पक्षों में $J_{v_2+2m+1}(wy)$ से गुणा करने, y के प्रति 0 से ∞ तक समाकलन करने एवं (2.1) तथा (1.4) का उपयोग करने पर

$$x^{\sigma_1}\cos wx\, F_1(x)\, F_2(x)\frac{2^{m_2}}{w^{\sigma_2}}M_2\sum_{r_2,t_2=0}^{\infty}\phi(r_2)\psi(t_2)\,(w)^{-2(hr_2+kt_2)}$$

$$\times H^{u+1,\, v+1}_{p+3,\, q+1}\left[\frac{2^{\lambda}}{w^{2\mu}}\middle|\begin{matrix}\left(1-\frac{m+\sigma_2}{2}-hr_2-kt_2,\ \mu\right),\ (a_p, e_p),\\ \left(\frac{1-m_2-\sigma_2}{2}-hr_2-kt_2,\mu\right),(1+m_2-\sigma_2-2hr_1-2kt_2,2\mu);\\ \left(\frac{1}{2}-\sigma_2-2hr_2-2kt_2-\mu\right),\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} A_{n_1,\, n_2}\, J_{v_1+2n_1+1}(wx),$$

जहाँ

$$M_2=v_2+2m_2+1.$$

(5.3) के दोनों पक्षों में $x^{-1}\,J_{v_1+2m_1+1}(wx)$ से गुणा करने, x के प्रति 0 से ∞ तक समाकल करने एवं (2.1) तथा (1.4) का उपयोग करने पर हमें

$$A_{m_1,\,m_2}=\frac{2^{m_1+m_2}}{w^{\sigma_1+\sigma_2}}M_1M_2\sum_{r_1,t_1=0}^{\infty}\sum_{r_2,t_2=0}^{\infty}\phi(r_1)\psi(t_1)\phi(r_2)\psi(t_2)$$

$$\times(w)^{-2(hr_1+kt_1+hr_2+kt_2)}\,H_3(M_1,M_2,r_1,t_1,r_2,t_2),$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$M_1=v_1+2m_1+1.$$

(5.2) तथा (5.4), से द्विगुण फूरियर-बेसेल श्रेणी (5.1) प्राप्त होती हैं।

(5.1) में क्रमशः $d=0$ तथा $c=0$ रखने पर हमें उपयोगी विशिष्ट दशाएँ प्राप्त होती हैं।

टिप्पणी 5

(5.1) के ही सदृश बहुगुण फूरियर-बेसेल श्रेणी की स्थापना उपर्युक्त विधि का बारम्बार सम्प्रयोग करते हुए की जा सकती है।

टिप्पणी 6

इस प्रपत्र में दी गई प्रविधि का अनुसरण करके कई संमिश्र चरों के H-फलन वाले हमारे मुख्य परिणामों (2.1), (3.1), (4.1) तथा (5.1) के सदृश परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं प्रो० सी० एम० जोशी, अध्यक्ष, गणित विभाग, एम० एल० सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर के प्रति आभार व्यक्त करना चाहूँगी जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मेरा मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compositio Math. 1963, **15**, 239-341.
2. एर्डेल्यी, इत्यादि, Higher Transcendental functions, भाग 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
3. एर्डेल्यी, इत्यादि Tables of Integral transforms भाग 1 मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
4. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98** 395-429.
5. ल्यूक, वाई० एल०, Integrals of Bessel functions. मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1962.

6. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Mathematics (348)-Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1973.

7. वही, The H-function with applications in statistics and other disciplines. Wiley Eastern Ltd., New Delhi 1978.

8. मकलैचलान, एम० डब्लू०, Bessel function for engineers. Oxford University Press, London 1961.

9. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The H-function of one and two variables with applications. South Asian Publishers, New Delhi 1982.

10. तक्षक, आर० एल०, Math. Ed. (Siwan) 1970, IV-3, 93-97.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

प्रदूषकों की दीर्घकालिक अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का मूंग की फसल पर प्रभाव

शिव गोपाल मिश्र तथा प्रमोद कुमार शुक्ल

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जुलाई 1, 1990]

सारांश

प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया का पौधों तथा मिट्टी के प्रभाव पर चल रहे अध्ययन को आगे बढ़ाते हुए हमने कैडमियम (Cd)×लेड (Pb) की अन्योन्य क्रिया के दीर्घकालिक अवशिष्ट प्रभाव देखने के लिए फसल चक्र की चौथी फसल में मूँग उगाया। यह पाया गया कि फसल के अंकुरण, वृद्धि, पौधों तथा जडों के हरे भार पर अन्योन्य क्रिया का कोई प्रभाव नहीं पड़ा परन्तु दानों की उपज पर सार्थक प्रभाव देखा गया। ऐसा प्रतीत होता है कि कैडमियम की उपलब्धता पर लेड ने योगवाही प्रभाव डाला।

Abstraet

Long-term residual effect of pollutants interaction on moong crop. *By* S. G. Misra and P. K. Shukla, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Alahabad, Allahabad.

In continuation to our previous studies regarding the effect of pollutants interaction on plants and soil, an experiment was conducted to assess the long-term residual effect of Cd × Pb interaction on moong crop. It has been observed that pollutants interaction did not reduce germination, growth and biomass of plants and roots but the grain yield was highly affected. In the long run, it appears, that this was due to synergistic effect of Pb on Cd availability.

यह विदित तथ्य है कि पौधों की वृद्धि एवं उत्पादन पर मृदा प्रदूषकों का बुरा प्रभाव पड़ता है और पौधों में उनकी जड़ों से कैडमियम (Cd) तथा लेड (Pb) का संचय होता है[1]। सिल्टी दोमट मृदा

में बलुई मिट्टी की अपेक्षा फसलों की वृद्धि लेड का सान्द्रण उच्च होने पर भी अधिक होती है। इसका कारण सिल्टी दोमट मिट्टी द्वारा लेड का दृढ़ता से बंधनीकरण अथवा उसके अघुलनशील लवण का निर्माण है। कैडमियम भी मिट्टी में इसी तरह व्यवहार करता है लेकिन कैडमियम का स्थिरीकरण मंद होने से वह पौधों को अधिक उपलब्ध रहता है।[4]

कैडमियम पौधों के द्वारा अवशोषित होकर भोज्य पदार्थों में पहुँचता है और कैडमियम की सूक्ष्म मात्रा भी मनुष्यों और जानवरों के लिए हानिप्रद है।[6] यही नहीं, कैडमियम पौधों द्वारा अन्य पोषक तत्वों के अवशोषण को भी कम करता है। फलस्वरूप कैडमियम की उपस्थिति से पौधों की वृद्धि तथा उपज में ह्रास होता है।[2] जब कैडमियम के साथ अन्य प्रदूषक भी पौधों द्वारा अवशोषित होते हैं तो सम्भवतः फसल की वृद्धि, उपज एवं गुणवत्ता और भी प्रभावित होते हैं।[3]

इन्हीं कारणों को ध्यान में रखकर हमने प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया के दीर्घकालिक अवशिष्ट प्रभाव का अध्ययन मूँग को परीक्षण फसल के रूप में चुनकर किया और उसके अंकुरण, वृद्धि एवं उपज का निरीक्षण एवं मापन किया।

प्रयोगात्मक

प्रक्षेत्र की तैयारी : शीलाधर संस्थान के फार्म में 48 मी०^2 प्रक्षेत्र का चुनाव किया तथा प्रक्षेत्र को अच्छी तरह से तैयार करके 1×1 मीटर^2 आकार के 48 प्लाटों में बाँट लिया गया। फिर यादृच्छिक विधि द्वारा उपचार करके जून 1989 से एक वर्षीय फसल चक्र में लगातार मक्का-शलजम-पालक-मूंग (कुल चार फसलें) ली गईं। फसलों की कटाई परिपक्व होने पर की गई। मृदा और पौधों के रासायनिक विश्लेषण के लिए अलग-अलग प्रतिदर्श लिये गये।

उपचार : प्रक्षेत्र के 1×1 मी०^2 क्षेत्रफल के प्लाटों में 0, 25, 50 एवं 100 ppm कैडमियम तथा 0 100,200, 400 ppm लेड (विलयन के रूप में) प्रति हेक्टर की मात्राएं डाली गईं। कैडमियम कार्बोनेट तथा लेड कार्बोनेट को हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में घोलकर तथा आसुत जल मिलाकर उपयुक्त आयतन मिट्टी में मिलाया गया। Cd तथा Pb को पृथक-पृथक तथा उनके सयोगों के साथ मिट्टी में डाला गया।

मूंग बोने के पांच दिन बाद अंकुरण, 15 दिन बाद पौधों की लम्बाई, 50 दिन बाद पौधों, जड़ों तथा दानों का भार ज्ञात किया गया। परिणाम सारणी 1 में एवं उनका विस्तृत सांख्यिकीय विश्लेषण सारणी 2 में अंकित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

अंकुरण तथा वृद्धि : सारणी 1 के साधारण अवलोकन से स्पष्ट है कि नियन्त्रण की तुलना में कैडमियम की सर्वोच्च मात्रा ((100 ppm) से अंकुरण में 10% और पादप वृद्धि में 11.7% की कमी आई जबकि लेड की सर्वोच्च मात्रा (400 ppm) से भी अंकुरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा। केवल

पादप वृद्धि में 8.7% की कमी आई। Cd तथा Pb की सर्वोच्च मात्राओं के संयोग से (Cd 100×Pb 400) अंकुरण में 12% तथा पादप वृद्धि में 24.6% की कमी आई। परन्तु कैडमियम×लेड के अवशेष की अन्योन्य क्रिया का मूंग के अंकुरण तथा वृद्धि पर कोई प्रभाव नहीं हुआ है (सारणी 1 F (cal) 2.05,NS 0.58NS) किन्तु सारणी 1 में दिये गये आंकड़ों के विस्तृत सांख्यिकीय विश्लेषण (सारणी 2) से ज्ञात होता है कि कैडमियम के अंकुरण पर सार्थक (F (cal)8.79) ऋणात्मक प्रभाव पड़ा जबकि लेड प्रभावहीन रहा। ऐसे ही कुछ परिणाम भारी धातुओं के साथ मौर्य तथा उनके सहयोगियों ने[7] अपने प्रयोगों में प्राप्त किये।

पौधों तथा जड़ों का भार : सारणी 1 के अनुसार प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया का दीर्घकालिक अवशिष्ट प्रभाव पौधों तथा जड़ों के भार पर नहीं पड़ा (F (cal) 2.05 NS, 1.13 NS) परन्तु कैडमियम और लेड के अलग-अलग प्रभाव के विश्लेषण से (सारणी2) दृष्टिगोचर होता है कि सिर्फ पौधों के हरे भार पर कैडमियम का सार्थक प्रभाव पड़ा (F (cal) 3.08) जबकि लेड का प्रभाव पौधों तथा जड़ों के भार पर हानिकारक (F (cal) 2.34, NS,1.88NS) सिद्ध नहीं हुआ। सारणी 1 के पुनरावलोकन से यह प्राप्त होता है कि प्रदूषकों की पृथक-पृथक सर्वोच्च मात्राओं (Cd 100 तथा Pb 400) के अवशिष्ट प्रभाव से पौधों के हरे भार में क्रमशः 26.6% एवं 1.25% की कमी हुई किन्तु एकसाथ होने पर यह कमी 25.90% हुई। जड़ों के भार में Cd 100 ppm के अवशिष्ट प्रभाव से 43.55% तथा Pb 400 ppm से 27.5% की कमी आई। एकसाथ मिले होने पर लेड के समान ही प्रभाव मिला। ऐसे ही परिणाम पाल और मुखर्जी [9] ने भी गेहूँ में वाहितमल तथा साफ जल से सिंचाई करने पर वाहितमल से सिंचित गेहूँ की वृद्धि तथा भार पर प्राप्त किये।

उपज : मूंग के दानों के भार पर प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया का अवशिष्ट प्रभाव अत्यधिक हानिकारक सिद्ध हुआ (सारणी 1 F (cal) 15.75)। अकेले केडमियम के प्रभाव से उपज बहुत ही कम हो गई (सारणी 2 F(cal) 66.69) जबकि अकेले लेड़ का दानों के भार पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा। जेलिस्ट्राम तथा उनके साथियों ने[8] गेहूँ के दानों में कैडमियम की सान्द्रता अधिक होने के फलस्वरूप गेहूँ की उपज में विशेष ह्रास देखा। हमारें प्रयोग में Cd 100 ppm से उपचारित प्लाटों में दानों के भार में 57.7% और Pb 400 ppm से उपचारित प्लाटों में 15.5% की कमी आई जबकि सर्वोच्च सांद्रता पर इन सान्द्रताओं के संयुक्त प्रभाव (Cd100×Pb400) से यह कमी 51.11% रही।

उपर्युक्त परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि लेड शायद अघुलनशील बन जाने से मूँग के लिए बहुत ही कम उपलब्ध हो पाता है जबकि कैडमियम अपेक्षतया अधिक उपलब्ध बना रहता है। ये परिणाम मिट्टी के द्वारा Cd तथा Pb की बन्धनशक्ति के अनुसार हैं।

स्पष्ट है कि Pb की तुलना में Cd अधिक शक्तिशाली तथा समर्थ प्रदूषक है जिसके प्रति किसानों को सावधान किया जाना है विशेषतया ऐसे स्लज या मलजल के प्रयोग के प्रति जिनमें Cd की मात्रा अधिक हो। चाहे मूँग हो या गेहूँ दानों में Cd के सान्द्रित होने से मनुष्य के स्वास्थ्य पर हानिकारक प्रभाव पड़ सकता है।

सारणी 1

कैडमियम × लैंड अन्योन्य क्रिया का मूंग की की फसल पर प्रभाव

क्रम संख्या	उपचार (मिग्राम०/क्रिग्रा०)	अंकुरण (पौधे/मीटर^2)	बोने के 15 दिन बाद पौधों की औसत ऊँचाई (सेमी०)	हरा जैव भार		उपज दानों का भार (ग्राम/मी०^2
				पौधों का भार (ग्राम/मी०^2)	जड़ों का भार (ग्राम/मी०^2)	
1	लेड 0+कैडमियम 0	15.66	23.00	390.00	41.66	75.00
2	लेड 0+कैडमियम 25	15.33	23.00	323.33	30.00	41.66
3	लेड 0+कैडमियम 50	15.00	20.33	210.00	23.33	35.00
4	लेड 0+कैडमियम 100	14.00	20.33	276.66	23.33	31.66
5	लेड 100+कैडमियम 0	15.33	18.66	276.66	18.33	55.00
6	लेड 100+कैडमियम 25	15.33	22.00	316.66	21.66	45.00
7	लेड 100+कैडमियम 50	14.66	19.00	216.66	23.33	38.33
8	लेड 100+कैडमियम 100	14.00	22.00	280.00	21.33	35.00

क्रमशः

9	लेड 200+कैडमियम 0	15.66	19.33	253.33	30.00	60.00
10	लेड 200+कैडमियम 25	15.33	19.00	193.33	26.66	45.00
11	लेड 200+कैडमियम 50	15.00	17.33	270.00	26.66	42.33
12	लेड 200+कैडमियम 100	14.00	20.33	270.00	23.33	36.66
13	लेड 400+कैडमियम 0	15.66	21.00	340.00	30.00	63.33
14	लेड 400+कैडमियम 25	14.33	17.33	386.66	36.66	51.66
15	लेड 400+कैडमियम 50	14.33	17.33	253.33	21.33	43.33
16	लेड 400+कैडमियम100	13.66	17.33	280.00	30.00	36.66
	F (cal)	2.05NS	0.58NS	2.05NS	1.13NS	15.75
	C.D. (5%) Cd के लिए	NS	NS	NS	NS	2.34**

NS असार्थक

** 0.01 पर सार्थक

म० प्रत्येक परिणाम तेहरी-पुनरावृत्ति का माध्य हैं।

सारणी 2

कारकों के विस्तृत सांख्यिकीय विश्लेषण के परिणाम

विचरण स्रोत	d. t.	अंकुरण F (cal)	वृद्धि F)cal)	पौधों का भार F (cal)	जड़ों का भार F (cal)	दानों का भार	F (tab) 5%	F (tab) 1%
उपचार	15	2.06NS	0.58NS	2.05NS	1.13NS	15.75**	2.26	2.83
कैडमियम	3	8.79	0.51NS	3.09*	1.15NS	66.79**	2.92	4·51
लेड	3	0.99NS	1.08NS	2.34NS	1.88HS	213NS	2.92	4.51
कैडमियम×लेड	9	0.16NS	0.43NS	1.62NS	0.88NS	3.28*	2.21	
त्रुटि	30							

NS असार्थक * 0.05 पर सार्थक ** .05 व 0.01 पर सार्थक

विशेष : जिन प्लाटों में 50, 100 ppm Cd के साथ 200, 400 ppm Pb उपचार किया गया था उनमें मूँग बोये जाने के 30 दिन बाद पौधों की पत्तियां पीली पड़ने लगीं और फलियां भी छोटी तथा भूरे रंग की लगीं। ऐसा शायद पौधों द्वारा आयरन (Fe) तथा मैंगनीज (Mn) के अवशोषण कम हो जाने से हुआ।[5] पत्तियों का पीला रंग पुष्पन अवस्था (flowering stage) के बाद समाप्त हो गया जिससे उपज तो कम हो गयी किन्तु पौधों का हरा भार नहीं प्रभावित हुआ। इस दिशा में आगे प्रयोग हो रहे हैं।

निर्देश

1. जोन, एम० के०, वानलियोवन, सी० जे० तथा चाह, एच० एच०, Environ Sci & Technol, 1972, **6**, 1005-9.
2. हागिरी, एफ० J. Environ Qual., 1973, **2**, 93-6.
3. हासेट, जे० जे०, मिलर, जे० ई०, तथा कापे, डी० ई० Environ. Pollut., 1976, 11, 297-302.
4. हासेट, जे० जे०, Commun Soil Sci. & Plant Anal., 1974, **5**, 499-505.
5. जोन, एम० के०, Environ. Pollut., 1976, 11, 85-95.
6. डेविड, आर० डी०, Experientia, 1984, **40**, 117-26.
7. मौर्य, ए० एन०, गुप्ता, आर० के०, तथा गुप्ता, ए० के०, Indian J. Environ., Health 1986, **29**, 134,-139.
8. जेलिस्ट्राम, टी०, बिरगर, एल०, लिनमान, एल०, तथा हिलडर, सी० जी०, Arch. Environ. Health, 1974, **30**, 321-8.
9. पाल, ए० के०, मुखर्जी, एस०, बायोलोजिया प्ला०, 1972, 14, 414.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

मटर में उत्पादन एवं उत्पादन से सम्बन्धित विभिन्न पौध गुणों के बीच सह-सम्बन्धता सम्बन्धी अध्ययन

महेन्द्र प्रताप चौहान

तथा

उदल सिंह संतोषी

चन्द्र शेखर आजाद कृषि एवं प्रौद्योगिक विश्वविद्यालय, कानपुर

सारांश

मटर में उत्पादन एवं उत्पादन से सम्बन्धित 10 विशिष्ट पौध गुणों को लेकर उनके बीच के सह-सम्बन्धता का अध्ययन किया गया। आनुवांशिक स्तर पर प्रति पौध के दाने की उपज की धनात्मक सह-सम्बन्धता विभिन्न पौध गुणों जैसे जड़ों पर गांठों की संख्या, फली की लम्बाई, प्रति पौध फलियों की संख्या, 100 दाने का भार, पौधे की सम्पूर्ण जैव उपज तथा पौधे की परिपक्वता अवधि से अधिकाधिक पायी गयी। परन्तु प्रति पौध दाने की उपज का हो, तने पर प्रथम पुष्प तक गाँठों की संख्या से विपरीत एवं अधिकाधिक सह-सम्बन्धता का आकलन किया गया। अतः इन गुणों को ध्यान में रखकर, पौधों में चयन किया जाता है तो चयनित पौधे निःसंदेह उपज की दृष्टि से अधिक सार्थक सिद्ध होंगे।

Abstract

Correlation studies among various yield and yield attributing characters. *By* M. P. Chauhan, and U. S. Santoshi, C. S. Azad University of Agriculture and Technology, Kanpur.

Correlation among 10 yield and yield attributing quantitative characters was studied in peas. Genotypic correlation of seed yield per plant was positive and

higher with other plant characters, like number of nodules per plant, length of the pod, pods per plant, 100 seed weight total biological yield and days to maturity. But the value of genotypic correlation was negative and high between yield per plant and number of nodes up to first flower. So selection for these characters should be valued accordingly to bring about economically better selected plants.

दलहनी फसलों में मटर का अपना एक विशिष्ट स्थान है । इसकी खेती दुनिया के लगभग सभी देशों में की जाती है । भारतवर्ष में इसकी खेती दाल एवं सब्जियों हेतु की जाती है । भारतवर्ष जैसे देश में जहाँ के लोग मुख्यतः शाकाहारी भोजन पर निर्भर करते हैं, मटर जैसी दलहनों फसलों का प्रोटीन स्रोत के रूप में अपना प्रमुख स्थान है । परन्तु इधर 30 वर्षों से इसके उत्पादन में काफी कमी आई है । इसका प्रमुख कारण मटर में ऐसी किस्मों का अभाव है जो कि रोगरोधी हों, लागत के प्रति प्रभावी हों तथा सघन कृषि हेतु उपयुक्त हों । फसल की आर्थिक उपज कई पौध गुणों (Traits) द्वारा प्रभावित होती है अतः मटर की प्रजाति विकास में पौधों के चयन में ऐसे पौध गुणों को ध्यान में रखकर चयन किया जाना चाहिए जो पौध गुण पौधे की आर्थिक उपज से सर्वाधिक सह-सम्बन्धित हों । इसी उद्देश्य को ध्यान में रखकर प्रस्तुत अध्ययन किया गया है ।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए मटर को 30 स्ट्रेनों (किस्मों) इ० सी० 3366, एल-116, टाइप-163, एच-1 से एच-23, के० पी० एम० आर०-10, के० एल० एम० आर०-7, के० एल० एम० आर०-9 एवं पी०-27 को प्रयुक्त किया गया । प्रयोग यादृच्छिक ब्लाक डिजाइन (Randomized block design) अपनाकर, 3 रेप्लीकेशन द्वारा किया गया । प्रत्येक प्लाट में पौधों को 5 कतारें थीं, कतारों के बीच आपस की दूरी 45 सेमी० रखी गयी थी । प्रत्येक प्लाट में से 5 पौधे बिना किसी भेद-भाव के चिन्हित किये गये । इन्हीं पौधों पर विभिन्न 10 पौध गुणों में से 9 पौध गुणों के आँकड़े समय-समय पर प्राप्त किये गये । एक अन्य पौधा भी प्रत्येक प्लाट से छोड़ा गया । इस विशेष पौधे को फूल आते ही भूमि से खोदकर इसकी जड़ों की गाँठें गिनी गयीं । इस प्रकार कुल मिलाकर प्रत्येक प्लाट से 6 पौधों पर, 10 पौध गुणों से सम्बन्धित आँकडें प्राप्त किये गये जो इस प्रकार हैं—पौधे में प्रथम पुष्प खिलने तक की अवधि, जड़ों पर गाँठों की संख्या, प्राथमिक शाखाओं की संख्या, फलियों की लम्बाई, प्रथम पुष्प तक तने पर गाँठों की संख्या, फलियों की संख्या प्रति पौध, 100 परिपक्व दानों का भार (ग्राम में), फसल की परिपक्वता अवधि, दाने की उपज प्रति पौध (ग्राम में), पौधे की कुल जैविक उपज (ग्राम में) ।

इन गुणों की आपस में आनुवांशिक सह-सम्बन्धता (Genotypic correlation) तथा दृश्य प्ररूपों सह-सम्बन्धता का अध्ययन (Phenotypic correlation) अलजिबोरी आदि[1] विधि से ज्ञात किया गया ।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न 10 पौध गुणों के बीच आनुवांशिक एवं दृश्य प्ररूपी सह-सम्बन्धता को सारणी में स्पष्ट रूप से दर्शाया गया है । अध्ययन में लिए गये लगभग सभी गुणों की आपसी सह-सम्बन्धता आनुवांशिक

सारणी 1 : मटर में उपज सहित 10 महत्वपूर्ण गुणों में आनुवांशिक एवं दृश्य प्रारूपी सह-सम्बन्धता

पौध गुण :		ख	ग	घ	च	छ	ज	ट	ठ	ड
क	अ	0.961	0.880	0.141	0.933	0.341	0.680	0.741	0.013	0.192
	ब	0.901**	0.971**	0.062	0.711**	0.383**	0.382**	−0.921**	0.085	0.181
ख	अ		0.951	0.711	0.162	0.543	0.670	0.611	0.730	0.280
	ब		0.940**	0.111	0.160	0.340	0.780**	0.181	0.611**	0.111
ग	अ			−0.622	0.780	−0.711	0.902	0.991	0.180	−0.050
	ब			−0.070	0.753**	−0.700**	0.510**	−0.360*	0.360*	0.680**
घ	अ				0.470	−0.570	0.990	0.230	0.783	−0.224
	ब				−0.102	−0.643**	−0.142	0.371**	0.171	−0.010
च	अ					0.682	0.811	0.332	−0.632	0.022
	ब					0.901**	0.769**	−0.530**	0.091	0.062
छ	अ						0.640	0.081	0.680	0.553
	ब						0.238	−0.021	0.261	0.859**
ज	अ							0.640	0.680	0.161
	ब							0.022	0.742**	0.181
ट	अ								0.462	0.553
	ब								0.210	0.081
ठ	अ									0.651
	ब									0.270

नोट : क—पुष्प खिलने तक की अवधि, ख—जड़ों में गाँठों की संख्या ग—प्राथमिक शाखाओं की संख्या, घ—फली की लम्बाई, च—प्रथम पुष्प तक गाँठों की संख्या, छ—प्रति पौध फलियों की संख्या, ज—100 दानों का भार, ट—परिपक्वता अवधि, ठ—दाने की उपज प्रति पौध, ड—पौध की सम्पूर्ण उपज ।

अ—आनुवांशिक सह-सम्बन्धता, ब—दृश्य प्रारूपी सह-सम्बन्धता

* 5 प्रतिशत स्तर पर सार्थकता

** 1 प्रतिशत स्तर पर सार्थकता

स्तर पर दृश्य प्ररूपी स्तर से ज्यादा ही पायी गयी । इसका कारण यह है कि पौधे के विभिन्न गुणों के बीच का जो आनुवांशिक सम्बन्ध होता है, वह वातावरण/वाह्य कारकों द्वारा प्रभावित होकर कम हो जाता है ।

आनुवांशिक स्तर पर प्रति पौध दानों की उपज, पौधे की जड़ों में पाये जाने वाली गाँठों की संख्या, फली की लम्बाई, पौधे की परिपक्वता अवधि, प्रति पौध फलियों की संख्या, 100 दानों के भार से बहुत अधिक सह-सम्बन्धित है । इसी प्रकार का परिणाम सिंह तथा सिंह[2], संघा आदि[3], श्रीवास्तव आदि[4] तथा चन्देल आदि[5] ने मटर में प्राप्त किया है । अतः प्रजाति विकास कार्यक्रम में पौधों का चयन करते समय इन पौध गुणों को ध्यान में रखना आवश्यक है । परन्तु इसके विपरीत प्रति पौध दाने की उपज का ही पौधे पर प्रथम पुष्प तक गांठों की संख्या के साथ ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया गया । अतः ऐसे पौध-गुणों को चयन के समय महत्व देने पर उपज पर कुप्रभाव पड़ेगा ।

पौधें में दाने की उपज की अन्य पौध गुणों से दृश्य प्ररूपी सह-सम्बन्धता पादप प्रजनन के लिए विशेष महत्व की नहीं है तथापि प्रति पौध दाने की उपज का पौधे की जड़ों पर पाई जाने वाली गाँठों की संख्या, 100 दानों का भार प्राथमिक शाखाओं की संख्या से धनात्मक दृश्य प्ररूपी सह-सम्बन्धता आँकी गयी है । सिंह तथा सिंह ने इसी प्रकार का परिणाम अपने मटर के प्रयोग में पाया है । दाने की उपज प्रति पौध की दृश्य प्ररूपी सह-सम्बन्धता फली की लम्बाई, परिपक्वता अवधि, प्रति पौध फलियों की संख्या से बिल्कुल नहीं है जबकि आनुवांशिक स्तर पर यह सह-सम्बन्धता अत्यधिक दृष्टिगोचर हुई है । इससे सर्वमान्य तथ्य सिद्ध होता है कि पौधों के गुणों के बीच की दृश्य प्ररूपी सह-सम्बन्धता वास्तविक सह-सम्बन्धता नहीं है अपितु आनुवांशिक सह-सम्बन्धता ही वास्तविक सह-सम्बन्धता है ।

निर्देश

1. अलजिबौरी, एच० ए०, मिलर, पी० ए० तथा राबिन्सन, एच० एफ०, Agro. J., 1958, **50**, 633-636.
2. सिंह, टी० पी० तथा सिंह, के० बी०, Indian J. Genet., 1909, **29**, 483-487.
3. संघा, ए० एस०, सिंह बी० वी० तथा सिंह, एम०, Madras Agric. J., 1971, **58**, 224-227.
4. श्रीवास्तव, जे० पी०, सिंह, एच० एन० तथा सिंह, एस० पी०, Indian J. Agric. Sci., 1972, **42**, 1001-1004.
5. चन्देल, के० पी० एस०, SABRAO. J., 1983, **15**, 55-64.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

ऐसीटोनाइट्राइल में N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन का पोलैरोग्राफीय अपचयन

मीना भारतीय तथा यू० एस० चतुर्वेदी

स्नातकोत्तर रसायन विभाग, एम० एस० जे० आटोनामस कालेज, भरतपुर (राज०)

[प्राप्त—मई 27, 1990]

सारांश

N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन के पोलैरोग्राफीय अपचय का अध्ययन पी० एच० 6.9 पर सम्पन्न किया गया। टेट्रापेंटिल अमोनियम आयोडाइड को सहायक विद्युत् अपघट्य के रूप में प्रयुक्त किया गया और पारद-ताल को निर्देश इलेक्ट्रोड की तरह प्रयुक्त किया गया। इससे कैथोडीय तरंग दिखी जिसमें अधिशोषण गुण पाये जाते हैं। मूलक ऋणायन के माध्यम से अपचयन-क्रियाविधि प्रस्तावित की गई है।

Abstract

Polarographic reduction of N-salicylidine aniline in a acetonitrile. *By* Meena Bhartiya and U. S. Chaturvedi,

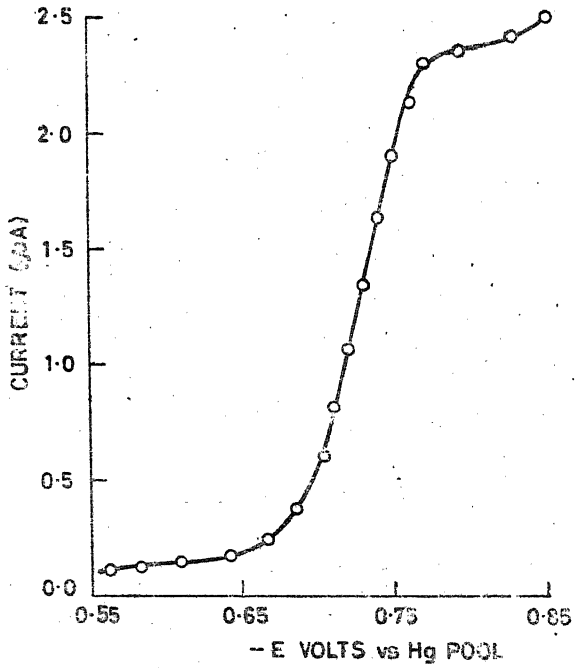
The polarographic reduction of N-salicylidine aniline was investigated at pH 6.9 in acetonitrile medium. Tetrapentylammonium iodide was used as the supporting electrolyte, while mercury pool was used as the reference electrode. A cathodic wave was observed which showed adsorption characteristics. A reduction mechanism, via radical anion, has been proposed.

इसके पूर्व की सूचनाओं में[1, 2] कतिपय ऐमीनों अम्ल इमीनों के पोलैरोग्राफीय अपचयन की विवेचना की जा चुकी हैं। इधर के वर्षों में अ-जलीय विलायकों में कार्बनिक यौगिकों के पोलैरोग्राफीय आचरण पर पर्याप्त ध्यान दिया जा रहा है[3] ऐसीटोनाइट्राइल एक उपयोगी विलायक सिद्ध हुआ है क्योंकि जल में अविलेय पदार्थों को विलयित करने की इसमें क्षमता है[4]। प्रस्तुत प्रपत्र में इस विलायक में N-सैलिसिलीडीन ऐमीन के अपचयन-आचरण का अध्ययन दिया जा रहा है।

प्रयोगात्मक

ऐसीटोनाइट्राइल माध्यम में इमीन का संश्लेषण काटन की विधि[5] से किया गया और इसके तात्विक विश्लेषण TLC आचरण तथा ir स्पेक्ट्रम के आधार पर लक्षण ज्ञात किये गये[6–8]। इस यौगिक की पीलाभ रंग की पट्टिकायें प्राप्त हुईं जिनका गलनांक 40° था।

तोशनीवाल मैनुअल पोलैरोग्राफ सं० 039 द्वारा पोलैरोग्राम रिकार्ड किये गये। ताप-स्थायी अवगाह द्वारा ताप को 39° पर स्थिर रखा गया। विन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड (dme) का केशिका स्थिरांक 1.652 $mg^{2/3}\ s^{-1/2}$ था पारद स्तम्भ की ऊँचाई 30 सेमी रखी गई। आन्तरिक पारद ताल निर्देश इलेक्ट्रोड का कार्य कर रहा था। टेट्रापेंटिल अमोनियम आयोडाइड (TPAI) को सहायक विद्युत अपघट्य के रूप में काम में लाया गया जिमें सिग्मा केमिकल कम्पनी यू० एस० ए० से प्राप्त किया गया था और उसी रूप में प्रयुक्त किया गया। सहायक विद्युतअपघट्य की कुल सांद्रता 0.1M रखी गई। इमीन का



चित्र 1

पी० एच० 6.92, (2.58×10^{-3}M), ताप 30°C पर ऐसीटोनाइट्राइल में N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन का धारा वोल्टता वक्र

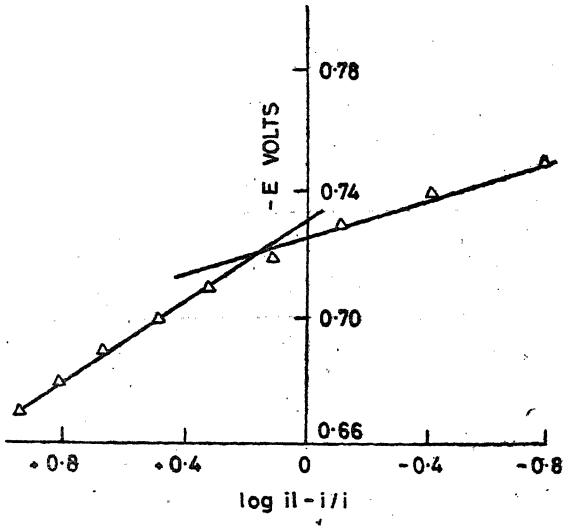
सहायक विद्युत अपघट्य टेट्रापेंटिलअमोनियम ब्रोमाइड(0.1M)

कार्यकारी इलेक्ट्रोड : विन्दुपाती पारद निर्देश इलेक्ट्रोड : पारद ताल

अध्ययन 2.56×10^{-3}M सांद्रता पर किया गया। परीक्षण विलयन में आक्सीजनरहित नाइट्रोजन को 20 मिनट तक बुदबुदाकर विलयन की वायु निकाल दी गई।

परिणाम तथा विवेचना

इमीन विलयन से एकाकी सुस्पष्ट कैथोडी तरंग प्राप्त हुई (चित्र 1) जिसके लाग-आलेख विश्लेषण से दो सीधी रेखायें मिली जिनमें प्रारम्भिक प्रवण 0.057v था। E के विपक्ष $\log (i_l - i)/i$ का आलेख चित्र 2 में दिया गया है। विभिन्न प्राचलों पर सांद्रता का प्रभाव सारणी 1 में अंकित हैं। पारद दाब बदलने पर सीमान्त धारा में प्रेक्षित विचरण सारणी 2 में दिये गये हैं।

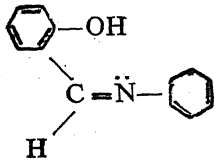


चित्र 2

N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन के पोलैरोग्राम का लाग आलेख विश्लेषण

यह देखा गया कि प्रति mM सीमान्त धारा इमीन की सांद्रता में वृद्धि के साथ घटती गई। सीमान्त धारा तथा $\sqrt{h}$ (h=पारद स्तम्भ की ऊँचाई) का अनुपात स्थिर नहीं होता (सारणी 2) जिससे यह विश्वास होने लगता है कि विसरण के अतिरिक्त अन्य कारक भी अपचयन प्रक्रम में निहित हैं।

N-सैलिसिलीडीन-ऐनिलीन में दो फेनिल वलय, एक $-\ddot{O}H$ समूह तथा एक इमिनो बन्ध रहते हैं



सारणी 1

N-सैलिसिलीडीन ऐनिलीन के प्राचलों पर सान्द्रता का प्रभाव

सान्द्रता (mM)	$i_1(\mu A)$	धारा प्रति mM	$-E_{1/2}(V)$
2.56	2.000	0.781	0.728
5.00	3.710	0.742	0.729
7.31	5.285	0.723	0.730
9.52	6.683	0.702	0.730

सारणी 2

सीमान्त धारा पर पारद दाब का प्रभाव

h_{corr}	सीमाकारी धारा (i_1) (μA)	$i_1/h^{1/2}$
18.3	1.374	0.321
23.3	1.612	0.334
28.3	2.000	0.376
33.3	2.240	0.389
38.3	2.430	0.394
43.3	2.706	0.412
48.3	2.963	0.427
53.3	3.193	0.438
58.3	3.402	0.446

इमीन की सांद्रता तथा पारद दाब को परिवर्तित करने पर प्राचलों में होने वाले परिवर्तिन सूचित करते हैं कि अधिशोषण तथा गतिक प्रक्रम विद्यमान हैं। अपचयन के दौरान यह पाया गया कि विलयन के रंग में क्रमिक परिवर्तन हुआ। संभावना है कि मूलक ऋणायन निर्माण से होकर विद्युत अपचयन होता है।[9] यह अभिक्रिया दो पदों में सम्पन्न होती प्रतीत होती है जिनमें पहला पद वेग निर्धारक है। दूसरे

पद में द्वितयीकरण सम्पन्न होता प्रतीत होता है। सम्पूर्ण प्रक्रम को निम्नवत् प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$(\phi\text{—CH=N—}\phi)\xrightarrow{e}(\phi\text{—}\dot{C}\text{H—N—}\phi)^-$$

मूलक ऋणायन

$$2\,(\phi\text{—}\dot{C}\text{H—N—}\phi)^-\rightarrow(\phi\text{—CH—N—}\phi)_2^{--}$$

द्विऋणायन

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय इस शोधकार्य के लिये यू० जी० सी०, नई दिल्ली द्वारा आर्थिक सहायता प्रदान किये जाने तथा जोधपुर विश्वविद्यालय के प्रो० आर० सी० कपूर के द्वारा विचार-विमर्श में सहायता करने के लिये आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, यू० एस० तथा कपूर, आर० सी० J. Indian. Chem. soc. 1982, **59**, 210.
2. वही, Natl. Acad. Sci. Letters, 1985, **8**, 75.
3. चेन, टी० आर०, ऐंडरसन, एम० आर० तथा पीटर्स, डी० जी०, J. Electroanal Chem., 1986, **19**, 341; 1987 **222**, 257.
4. गोवार्ड, जी० डब्ल्यू तथा सिल्डमान, डब्ल्यू० सी०, J. Org. Chem., 1955, **20**, 378.
5. काटन, एफ० ए० Progress in Inorganic Chemistry, इण्टरसाईंस न्यूयार्क भाग 7, 1966.
6. पेरी, ई० एस० तथा वाइस बर्गर, ए०, Thin Layer Chromatography, इण्टरसाइन्स पब्लिशर्स, न्यूयार्क 1967.
7. राव, सी० एन० आर०, Chemical Applications of IR Spectroscopy, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1963.
8. डायर, चे० आर० Application of Absorption Spectroscopy of Organic Compoudnds प्रेंटिस हाल, न्यूयार्क, 1965.
9. स्काट, जे० एम० डब्ल्यू० तथा जुर्स, डब्ल्यू० एच०, Can. J. Chem., 1967, **45**, 2375.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

ऐरिल आक्सीऐल्केन कार्बोक्सिलिक अम्ल एस्टरों का संश्लेषण एवं उनकी जैव सक्रियता

जया चौहान, सन्तोष कुमार तथा जे० एस० चौहान
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—नवम्बर 2, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र द्वारा ऐरिल आक्सीऐल्केन अम्लों के विषम-चक्रीय एस्टरों के संश्लेषण और उनकी सक्रियताओं की सूचना दी जा रही है ।

Abstract

Synthesis and biological activity of aryloxyalkane carboxylic acid esters. *By* Jaya Chauhan, Santosh Kumar and J. S. Chauhan, Chemical Laboratories, University of Allahabad, Allahabad.

The present paper records the synthesis of heterocyclic esters of aryloxyalkane carboxylic acids and their pharmacological activities.

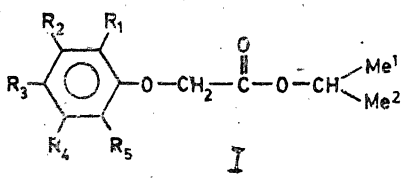
विविध एस्टर अपने औषधीय महत्व के लिये विख्यात हैं । साहित्य के अवलोकन से पता चलता है कि ऐरिल-आक्सी तथा प्रतिस्थापित ऐरिल आक्सीअम्लों के ऐस्टरों में कुछ भेषजीय सक्रियतायें पाई जाती हैं[1, 4, 5–7] । वे हाइपरलिपिडेमिक रोगियों में सीरम कोलस्टेराल तथा बाइग्लीसराइड स्तर को भी घटाने वाले हैं ।

फलतः ऐरिल आक्सीऐल्केन कार्बोक्सिलिक अम्लों तथा आइसोप्रोपेनाल की सम अणुक मात्रायें एक शुष्क अक्रिय न्यून क्वथनांक विलायक में लेकर और डाइसाइक्लोहेक्सिल कार्बोडाइइमाइड (DCC) को निर्जलीकारक के रूप में प्रयुक्त करते हुये संघनित करके ऐस्टर तैयार किये गये और उनके भैषजीय गुणों का परीक्षण किया गया ।

प्रयोगात्मक

मेथिल-फीनाक्सी तथा मेथाक्सीफीनाक्सी ऐसीटिक अम्लों का संश्लेषण $ClCH_2.COONa$ के साथ उपयुक्त फीनालों के सोडियम लवणों से किया गया[10, 11]।

सामान्य संरचना (I) वाले ऐरिल आक्सीएस्टरों का संश्लेषण शुष्क एथिलऐसीटेट या ईथर में ऐरिलआक्सीऐल्केन कार्बोक्सिलिक अम्ल तथा आइसोप्रोपैनाल की समअणुक मात्रायें मिलाने के बाद मिश्रण में DCC की अधिक मात्रा डालकर कमरे के ताप पर 14 घंटे तक चुम्बकीय विधि से विलोडित किया गया। तत्पश्चात् अभिक्रिया मिश्रण को ऐसीटिक अम्ल के साथ हिलाया गया जिससे अनभिकृत DCC डाइसाइक्लोहेक्सिल यूरिया (DHU) में परिणत हो जाय। अवक्षिप्त DHU को छानकर बचे विलयन को दो तीन बार 50 मिली० 10% $NaHCO_3$ से धोकर अनभिकृत अम्ल को हटा दिया गया। अन्त में इसे आसुत जल से धोया गया। तब इसे अनार्द्र Na_2SO_4 के ऊपर सुखाया गया और विलायक को प्रह्लासित दाब के अन्तर्गत एक रोटेटरी वाष्पक द्वारा हटा दिया गया। तत्पश्चात् पुन 10% $NaHCO_3$ से और तब आसुत जल से धोकर अम्ल को पूरी तरह हटा दिया गया। अन्तिम उत्पाद को गर्म जलीय एथेनाल से क्रिस्टलित करके छानकर और $CaCl_2$ के ऊपर निर्वात डेसीकेटर में सुखा लिया गया।



I

Isopropyl (Methyl/Methoxy phenoxy) Acetate

आइसोप्रोपिल (मेथिल/मेथाक्सी फीनाक्सी) ऐसीटेट

I

उत्पाद की समांगता की परीक्षा पतले-स्तर-क्रोमैटोग्राफी द्वारा की गई। प्रत्येक यौगिक का सिलिका जेल G की क्रोमेटोप्लेटों में एक धब्बा मिला। विभिन्न यौगिकों के प्रयोगात्मक आंकड़े आगे दिये जा रहे हैं

यौगिक A

R_1=Me, R_2=Hc, R_3=Hb, R_4=Hd, R_5=Ha

गलनांक=134.35°C, प्राप्ति=75.96%

प्राप्त संघटन C=69.20%, H=7.65%

वांछित C=69.23%, H=7.69%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3020 (C—H Str, arom), 2925, 2860 (C—H str, alkyl, asym, sym, resp.), 1720 (>C=0 str), 1600, 1549, 1535, 1470 (C=C, inplane bend, arom), 1450 ($-CH_2-$bend), 1335, 1325 (doublet, C—H bend, gemdimethyl group), 1240, 1050 ($Ar-O-CH_2$ str, asym, sym, resp), 1228 (C—CO—O str), 1125 (O—C—C str), 975 (C—H inplane bend, arom), 800—760 (C—H out of plane bend, arom), 715 (rocking vibrat, $-CH_2-$), 660 (C=C, out of plane bend, arom).

p. m. r. स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90MHz, δ 1.22 (d, 3H, Me^1) ; 1.74 (d, 3H, Me^2); 2.25 (S, 3H, Me); 3.22—4.22 (m, $1H_2-CH-$); 4.74 (S, 2H, $-CH_2-$); 6.5 J=7.2 cps, 1Ha); 6.84 (d, J=6.3 cps, 1Hb); 7.03 (d, J=6.3 cps, 1Hc); 7.21 (d, J=9 cps, 1Hd).

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

m/e=208

यौगिक B

$R_1=R_5$, =Ha, R_3=Me, $R_2=R_4$=Hb

गलनांक=119-20°C, प्राप्ति 81.00%

प्राप्त संघटन C=69.20% H=7.64%

वांछित C=69.23% H=7.69%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3020, 2970, 2840, 1740, 1615, 1530, 1515, 1460, 1445, 1350, 1335, 1250, 1055, 1210, 1105, 1032, 810—760, 720—622.

p. m..r स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90MHz, δ 1.27, 1.66, 2.27, 3.74—4.16, 4.71, 6.74 (d, J=9 cps, 2Ha), 7.06 (d, J=6 cps, 2Hb).

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

m/e=208

यौगिक C

R_1=Me', R_2=Hb, R_3=Me'', R_4=Hc, R_5=Ha

गलनांक=110-111°C, प्राप्ति=86.94%

प्राप्त संघटन C=70.24% H=8.08%

वांछित C=70.27% H=8.11%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3020, 2910, 2840, 1700, 1605, 1530, 1500, 1445, 1425, 1340, 1330, 1255, 1080, 1220, 1160, 980, 805—700, 650.

p. m. r. स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90MHz, 1.20; 1.75; 2.15 (5, 6H, Me′ Me″); 3.7—4.1; 4.66; 6.52 (d, J=9 cps, 1Ha); 6.8 (d, J=3.4 cps, 1Hb); 7.15 (d, J=9 cps, 1Hc).

द्रव्यमात्र स्पेक्ट्रम

m/e=222

यौगिक D

R_1=Me′, R_2=Hc, R_3, Hb, R_4=Me″, R_5=Ha

गलनांक=120-21°C प्राप्ति=82.5%

प्राप्त संघटन C=70.24% H=8.08%

वांछित C=70.24% H=8.11%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3090, 2975, 2900, 1730, 1600, 1550, 1520, 1460, 1420, 1342, 1310, 1265, 1090, 1240, 1175, 980, 830—760, 720, 670.

p. m.r. स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90 MHz, δ 1.17; 1.68; 2.12 (s, 3H, Me′); 2.17 (s, 3H, Me″); 3.09—4.30, 6.54 (d, J=3 cps, 1Ha); 6.83 (d, J=8 cps, 1Hb); 7.09 (d, J=8 cps, 1Hc).

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

m/e=222

यौगिक E

R_1=OMe, R_2=R_3=R_4=R_5=H

गलनांक=219-20°C, प्राप्ति=42.86%

प्राप्त संघटन C=64.27% H=7.12%

वांछित C=64.29% H=7.14%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3020, 2920, 2850, 1700, 1610, 1520, 1500, 1460, 1435, 1340, 1335, 1250, 1080, 1220, 1180, 1020, 870—750, 720, 650.

p. m. r. स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90 MHz, δ 1.24; 1.61; 3.34—3.65; 3.78 (s, 3H, OMe); 5.68; 6.81 (5, 4H, Benzene proton).

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

m/e=224

यौगिक F

$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=H$, $R_3=OMe$

गलनांक =117-18°C प्राप्ति=38.62%

प्राप्त संघटन C=64.26% H=7.12%

वांछित C=64.29% H=7.14%

i. r. स्पेक्ट्रम

ν_{Max}^{KBr} cm^{-1} 3000, 2920, 2850, 1700, 1410, 1510, 1505, 1550, 1440, 134, 1335, 1240, 1060, 1210, 1170, 1025, 830—770, 620.

p. m. r. स्पेक्ट्रम

$COCl_3$, 90 MHz, δ 1.20; 1.64; 2.8—2.99; 3.65 (5, 3H, OMe); 4.60; 6.74 (s, 4H, Benzene proton).

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

m/e=224

विवेचना तथा परिणाम

भेषजगुण विज्ञानीय सक्रियता (Pharmocological Activity)

सभी एस्टरों का LD_{50} 681 मिग्रा/किग्रा (चूहे को इन्ट्रापेरिटोनियली दिया गया) है। अपवाद-स्वरूप यौगिक A तथा D है जिनके LD_{50} मान क्रमशः 825 तथा 1000 मिग्रा०/किग्रा० है।

बिल्लियों पर किये गये परीक्षणों में कार्डियोवैस्कुलर गुणांक स्पष्ट नहीं था । शोध संदमन का प्रतिशत शून्य या नगण्य था । एलर्जी-विरोधी गुण सारणी 1 में दिया गया है ।

LD_{50} की 1/5 मात्रा (डोज) चूहों को मुख से दी गई ।

सारणी 1

यौगिक	निष्क्रिय त्वक्र तीव्रग्राहिता
A	67
B	50
C	60
D	50
E	54
F	66

उपर्युक्त परिणामों से प्रकट होता है कि बेंजीन वलय में मेथिल समूह प्रविष्ट कराने पर सक्रियता बढ़ जाती है । बेंजीन वलय में 2-स्थिति पर मेथिल समूह वाला यौगिक 4-स्थिति पर मेथिल समूह वाले यौगिक की तुलना में अधिक सक्रिय पाया गया । डाइमेथिल व्युत्पन्नों में से 2-4-डाइमेथिल अधिक शक्तिशाली था, 2-5-डाइमेथिल समावयव की अपेक्षा मेथाक्सी समूह से युक्त 4-समावयव 2-समावयव से अधिक सक्रिय पाया गया (देखें सारणी 1) ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (जया चौहान) आर्थिक सहायता के लिये सी० एस० आई० आर०, नई दिल्ली तथा जैव-मूल्यांकन के लिये सी० डी० आर० आई० के प्रति कृतज्ञता प्रकट करता है ।

निर्देश

1. रासी, ए० तथा एग्ली, सी०, Ger often pat.. 2060573 (Cl. CO7c, A61K) 24 June 1971, CA 75; 764-16j.

2. नाकामुरा, वाई० अगात्सुमा, के०, टनाका, वाई० तथा अनु, एस० S. Africaa pat. 700 5223, 11 Mar. 1971. CA 75 : 151545f.

3. ग्रियाट, आर० जी० U. S. pat. 3598860 (Cl. 260-473, CO_{7c}) 10 Aug. 1971, CA 75 : 98324e.

4. वही, U. S. pat. 3598869 (Cl. 260-473, CO7c) 10 Aug. 1971, CA 75 : 98325f.

5. वही, Fr. M. Pat. 7451 (Cl. A61K CO7c) O5 Jan. 1970, CA 75 : 35448c.

6. रैकोस्जी, जे० फिशर, जे० मिकिटे, जी० रार्सी, जे० तामसी, जी० पोलगरी, आई० तथा एल० के० एस० Ger. Offen. Pat. 2022675 (Cl. CO7c, A61K), 14 Jan. 1971, CA 74 : 64059 m.

7. (Egyesult, Gyogyszer es Tapszergyer) Fr. Demande, Pat. 2088017 (Cl. A61K, CO7c) 11 Feb. 1972, CA 77 : 88101g.

8. ओरियेन्टै, पी० मोहोलेसे, एम० ओरकुआ, आर० तथा मैनसिनी, एम० Inst. 2. Klin. Pharmakol. Ther. Toxikol. 1969, 2(4), 348-53.

9. डुजोन्ने, सी० ए० वीस, पी० तथा बियाचिने, जे० आर०, Clin. Pharmakol. Ther. 1971, 12(1), 117-25.

10. कोएल्श, फ्रेडरिक, जर्न० अमे० केमि० सोसा०, 1931, 53, 304.

11. प्रोक्रोनी, राबर्ट, वही, 1941, 1768.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

शोरिया रोब्यूस्टा के रासायनिक संघटन एवं सेल्यूलोसी पॉलिसैकराइड शर्कराओं का विश्लेषणात्मक अध्ययन

आर० एन० शुक्ला

प्रयुक्त रसायन विभाग, सम्राट अशोक टेक्नॉलॉजिकल इन्स्टीट्यूट, विदिशा (म० प्र०)

पी० एस० शर्मा

रसायन विभाग एस० एस० एल० जैन पी० जी० महाविद्यालय, विदिशा (म०प्र०)

तथा

आर० एम० श्रीवास्तव

रसायन विभाग, शासकीय मोतीलाल विज्ञान आदर्श महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 16, 1990]

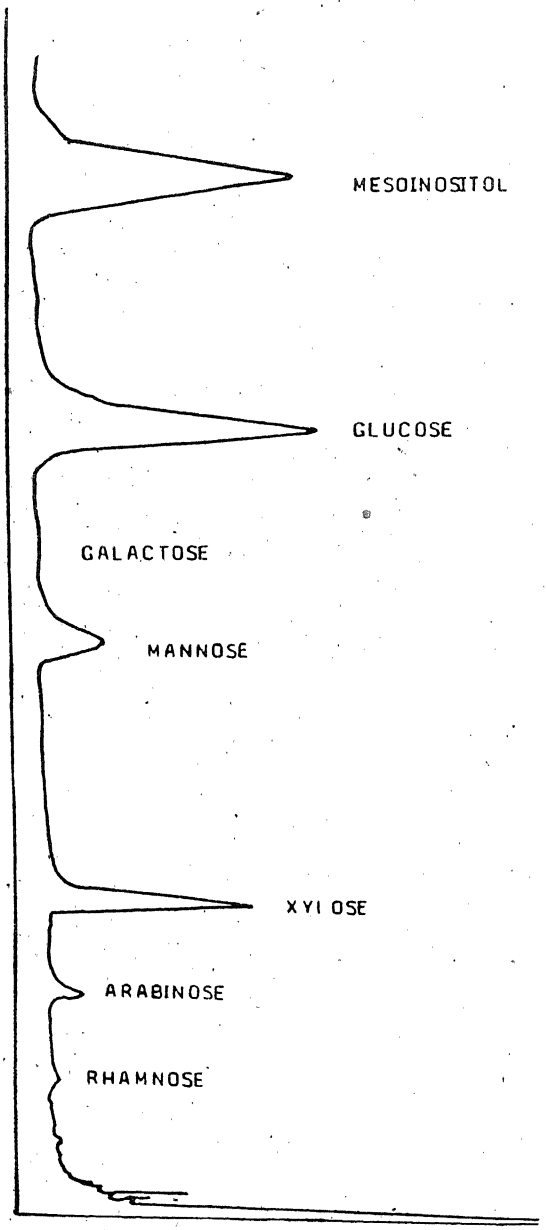
सारांश

व्यापारिक रूप से प्राप्त **शोरिया रोब्यूस्टा** (साल) के काष्ठ के रासायनिक संघटन के अध्ययन के लिये काष्ठ का विश्लेषण किया गया एवं प्राप्त परिणाम के आधार पर काष्ठ को लुगदी एवं कागज निर्माण में उचित पाया गया। नॉन सेल्यूलोसिक पोली सैकराइड (नॉ० से० पो० सै०) के महत्व को समझाने के लिये उसका निष्कर्षण एवं शुद्धीकरण किया गया। शुद्ध नॉ० से० पो० सै० में उपस्थित शर्करा का विश्लेषण पेपर क्रोमेटोग्राफी व गैस-द्रव क्रोमेटोग्राफी तकनीकों द्वारा किया गया है। शुद्ध नॉ० से० पो० सं० को 4-O-मी डी-ग्लूकोरोनेक्सीईलिन के रूप में पाया गया।

Abstract

On chemical composition of Shorea Robusta. *By* R. N. Shukla, S. P. Sharma and R. M. Srivastava, Government Motilal Vigyan Adarsh Vidyalay, Bhopal, M. P.

Commercially available wood of Shorea robusta (Sal) was analysed for the determination of its ingredients. A comparative study has been recorded. The complete study of sugar composition of non-cellulosic polysaccharide contents mainly



चित्र 1 : शोरिया रोबुस्टा की डस्ट के एल्डीटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न का क्रोमेटोग्राम ।

(N. C. P.) isolate from Shorea robusta have been carried out. The paper chromatography, gas liquid chromatography techniques were adopted for the purification. N. C. P. fraction have been studied. The N. C. P. fraction was identified as 5-0 Mee-D-Glucoronexilin. On the basis of the results obtained it has been concluded that **Shorea robusta** is useful for the pulp and paper production.

शोरिया रोब्यूस्टा (Shorea robusta) भारत में भौगोलिक दृष्टि से गंगा के मैदानी भाग[1] के दक्षिण और बिहार में, उड़ीसा के गंजाम एवं कोरापुट जिले में, आंध्रप्रदेश के श्रीकाकुलम् एवं मध्य भारत के जबलपुर व पश्चिम क्षेत्र में विस्तृत रूप से 113479 वर्ग कि० मी०[2, 3] में जंगलों के रूप में फैले हुये हैं। भारतीय परिस्थितियाँ एवं मौसम इसके लिये पूर्णतः अनुकूल हैं। इसके काष्ठ का उपयोग इमारती लकड़ी के रूप से किया जाता है, लेकिन इसकी शाखाओं के पतले भाग एवं अनुपयोगी भाग का उपयोग अन्य काष्ठों के साथ मिलाकर लुगदी एवं कागज उद्योग में किया जा रहा है, जो कि व्यापारिक दृष्टि से लाभप्रद है। नानसेल्यूलोसी बहुसैकराइडों (नॉ० से० पो० सै०) का उपयोग लुगदी की गुणवत्ता को बढ़ाने एवं घटाने में महत्वपूर्ण कार्य करता है। कागज श्रेणी की लुगदी उपस्थिति, गुणवत्ता एवं व्यापारिक दृष्टि से लाभप्रद है, जबकि रेयॉन श्रेणी की लुगदी में इसकी इच्छित श्यानता प्राप्त करने के लिये इसका पृथक्करण अनिवार्य है। अतः रासायनिक संघटन की दृष्टि से नॉ० से० पो० सै० का अध्ययन प्राप्ति एवं पृथक्करण को समझाने में सहायक होगा। इसके पूर्व पृथक्करण को समझाने के लिये शोध कार्य नहीं हुआ। अतः यह शोध अपने क्षेत्र में महत्वपूर्ण है।

विभिन्न प्रकार के काष्ठों के रासायनिक संघटनों का अध्ययन डिके[4] ने किया और पाया कि आवृतबीजी वृक्ष वाले काष्ठ (हार्ड वुड) में नॉ० से० पो० सै० नग्नबीजी वृक्ष वाले काष्ठ (सॉफ्ट वुड) की तुलना में अधिक होता है एवं इसका रासायनिक संघटन भी पूर्णतः भिन्न प्रकार का होता है। हार्डवुड में यह मुख्य रूप से पांच कार्बन वाली शर्कराओं (जाइलोस) का बना होता है। हार्डवुड एवं साफ्ट वुड की प्रजातियों में शाखायुक्त समूह वाला हैक्सॉरॉनिक अम्ल पाया जाता है, जो कि मुख्यतः गैलैक्ट्यूरॉनिक अम्ल या गैल्यूक्यूरॉनिक अम्ल के रूप में होता है। नॉ० से० पो० सै० सामान्यतः पांच मोनोसैकराइडों के बने होते हैं, जिनमें से तीन हैक्सोस शर्करा इकाई वाले तथा दो पेन्टोस शर्करा इकाई वाले हैं जिनके नाम क्रमशः ग्लूकोस, गैलेक्टोस तथा मैनोस एवं जाइलोस, एरेबिनोस हैं। जाइलोस शर्करा के एकलक में दो प्रकार के व्युत्पन्न समूह होते हैं, जो मिथॉक्सिल एवं ऐसील समूह के रूप में रहते हैं। मिथॉक्सिल समूह एक दूसरे से बंधित रहता है जबकि ऐसीटिल समूह प्रतिस्थापित ऐसीटिक एसिड एस्टर सामूहिक रूप में रहता है। हॉविले तथा नॉरमेन[5] द्वारा नॉ० से० पो० सै० का वर्गीकरण क्रॉस एवं बीवन सैल्यूलोज़ निर्माण विधि से किया गया। उन्होंने इसको तीन वर्गों में वर्गीकृत किया—

(i) सेल्यूलोसैन्स—जो कि सेल्यूलोस के साथ रहता है।

(ii) हैमीसेल्यूलोस यूरोनिक अम्ल रहित—जो कि हैमीसेल्यूलोस के साथ उस भाग में रहता है, जिसमें यूरोनिक अम्ल समूह नहीं रहता।

(iii) पोलीयूरॉइड्स—हेमीसेल्यूलोस का वह भाग जिसमें यूरोनिक अम्ल समूह रहता है।

आधुनिक सिद्धांतों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला कि काष्ठ में उपस्थित नॉ० से० पो० सै० में पानी को सोखकर एक मैट्रिक्स बाण्डिग पदार्थ बनाने की क्षमता है, जो कि सेल्यूलोस संरचना अवयवों को आपस में जोड़कर काष्ठ का रेशा बनाता है। स्पीलवर्ग ने अपने प्रयोग से सिद्ध कर दिया कि वास्तविक तन्तु की शक्ति के लिये काष्ठ में नौ० से० पो० सै० की उपस्थिति वाले अवयवों में अधिकतम तनाव का वितरण कर देती है। ऐसा रासायनिक संघटन शोरिया रोब्यूस्टा के काष्ठ में होना चाहिये।

प्रयोगात्मक

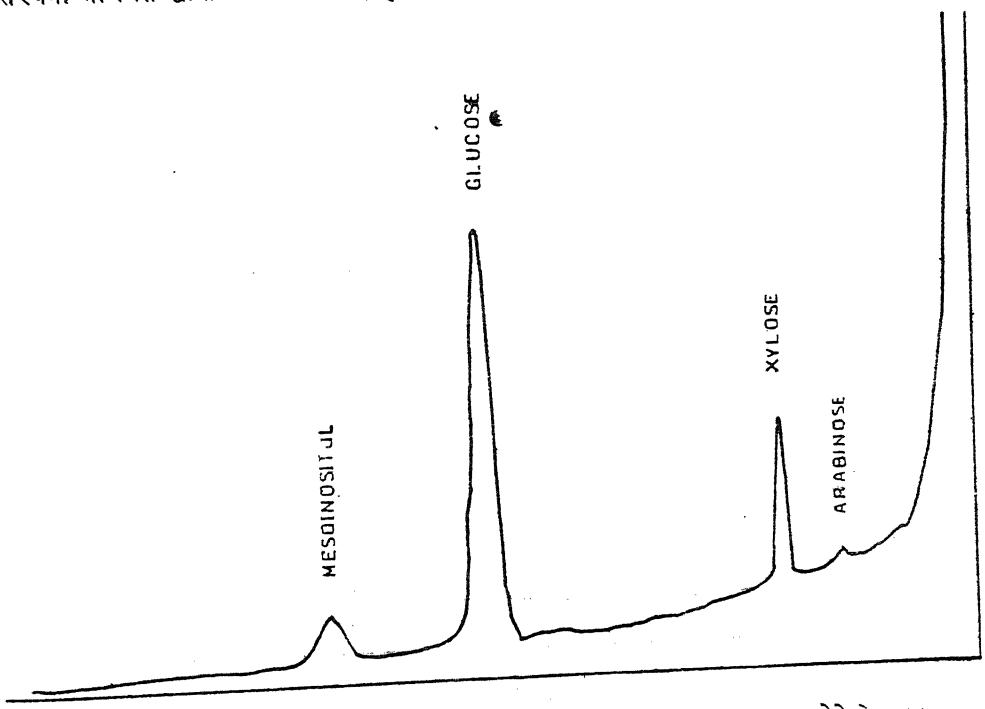
शोरिया रोब्यूस्टा के काष्ठ को म० प्र० के जबलपुर, उड़ीसा के गंजाम एवं कोरापुट आंध्रप्रदेश के श्रीकाकुलम् जिले के विभिन्न भागों से एकत्र किया गया। उसके सूखे काष्ठ की छाल निकाल करके छोटे-छोटे टुकड़ों में काटकर उसका बुरादा बनाया गया। इस बुरादे को भारतीय मानक की 40 तथा 60 नम्बर वाली छन्नी से छानकर प्रदर्श बनाया। इसी प्रदर्श का उपयोग पूरे अध्ययन में किया गया। रासायनिक विश्लेषण अन्तर्राष्ट्रीय लुगदी एवं कागज़ तकनीकी संघटन के मानक [6] एवं कैनेडियन संघ स्टैण्डर्ड[7] की विधियों द्वारा किया गया। विश्लेषण से प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दर्शाये गये हैं। होलोसेल्यूलोस को जो कि पूर्ण कार्बोहाइड्रेट का भाग है क्लोराइड विधि[8] द्वारा प्राप्त किया। होलोसेल्यूलोस से नौ० सै० पो० सै० का निष्कर्षण पोटैशियम हाइड्राक्साइड[9] के द्वारा सुझाई गई विधि से किया गया एवं इसका शुद्धीकरण विक्टर तथा चन्द्रा[10] के द्वारा सुझाई गई विधि से किया गया। शुद्ध नॉ० से० पो० से० के रासायनिक संघटन के अध्ययन के लिये पेपर क्रोमेटोग्राफी एवं गैस-द्रव क्रोमेटोग्राफी की विधियों द्वारा उसका गुणात्मक एवं भारात्मक विश्लेषण किया गया जिससे मोनोसैकराइड युक्त नॉ० से० पो० सै० के अवयवों का पृथक्करण संभव हो सका। क्रोवेल[11] तथा ब्रोचाराइट[12]] की विधि के अनुसार बुरादे तथा लुगदी का जलअपघटन किया गया एवं एल्डिटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न बनाया जिससे काष्ठ के बुरादे, होलोसेल्यूलोस एवं नॉ० सै० पो० से० के एल्डिटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न प्राप्त हुये। व्युत्पन्न प्राप्त करने के लिये निम्नलिखित विधि अपनाई :

एल्डिटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न का बनाना :

0.1 ग्राम प्रदर्श को 1 मिलि०72% सल्फ्यूरिक अम्ल के साथ30° सेंटीग्रेड पर एक घंटे तक हिलाया गया। आधा घन्टे ठंडा होने के पश्चात् 28 मिलि० आसुत जल मिलाया गया जिससे अम्ल की सांद्रता 3% हो गई। इस द्रव को एक घंटे तक 12°C एवं 15 P.S.I. दाब पर संघनित किया। संघनित द्रव I.R.45 धनायन शोषित रेजिन में से प्रवहित किया गया, जिससे उसकी पी०एच० 4.5 हो गया। रेजिन के स्तम्भ को 150 मि०लि० आसुत जल से धोया गया। इस विलयन में 20% मोसी-इन-ओसीटोल को आन्तरिक संघनित्र द्रव के रूप में मिलाने के बाद 40°C समानीत दाब पर द्रव का सांद्रण करके 1 मिलि० द्रव बनाया गया। इस श्यान द्रव को 2 मिलि० तक तनु किया एवं 0.065 ग्राम सोडियम बोरोहाइड्रेट मिलाया गया, जिससे शर्करा के एकलक बन जायें। इस विलयन को 3 घंटे कमरे के ताप पर ही रखा। उसके बाद I.R. 120 ऋणायन शोषित रेजिन में से प्रवाहित किया गया, जिससे सोडियम आयन पृथक

हो जाते हैं। इस रेजिन को पांच बार 3 मिलि० पानी द्वारा एवं ऐथेनॉल द्वारा (1:1 विलयन) धोते हैं। इस विलयन को 40°C एवं समानीत दाब पर सुखा लेते हैं और यह विशेष ध्यान रखते हैं कि पदार्थ का विघटन न हो। सूख हुये पदार्थ में 10 मिलि० 99.9% मेथिल ऐल्कोहल मिलाकर तीन से चार बार वाष्पित करते हैं। अम्ल में 0.08 मिलि० श्यान द्रव को 2 मिलि० क्रोमेटोग्राफी श्रेणी के पिरीडीन विलायक एवं 2 मिलि० ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड़ के साथ मिलाते हैं। इस द्रव को 4 घंटे तक 130°C तक संघनित करते हैं। इससे प्राप्त सांद्रित भूरे रंग के श्यान द्रव को ऐल्डीटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न कहते हैं। इसका विश्लेषण क्रोमेटोग्रामी विधि द्वारा किया।

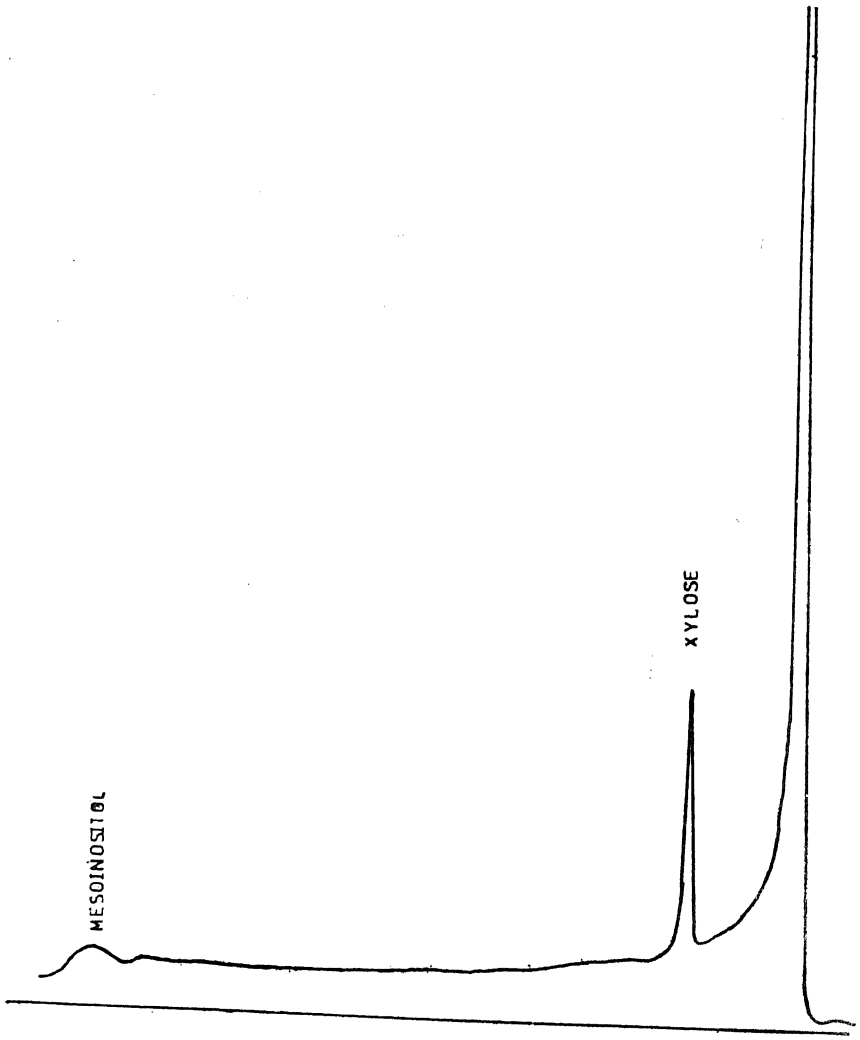
उपर्युक्त प्राप्त श्यान द्रव का पर्किन एल्मर गैस क्रोमेटोग्राफ यंत्र (मॉडल नं० 3920), जिसमें अंतरज्वाला आयन सूचक होता है एवं पर्किन एल्मर रिकार्डर (मॉडल नं० 56) के द्वारा विश्लेषण किया गया। इसके लिये स्टेनलेस स्टील के स्तम्भ (1.5 मी० लंबा एवं 0.3 से० मी० व्यास) में L फेस 3% ई० सी० एन० एस० एम० क्रोमोस्वो डब्लू (गेस क्रोम) का उपयोग किया। नाइट्रोजन का उपयोग गैस के रूप में किया गया, जिसकी प्रवाह दर 30 मिलि०/मिनिट रखी गई। इस समय इंडक्शन एवं डी ब्लॉक भाग का ताप 225°C एवं स्तम्भ का ताप 180°C तक स्थापित किया गया। उचित मात्रा में प्रदर्श द्रव को इन्जेक्ट किया गया। उपर्युक्त विश्लेषण से जो ग्राफ मिले वे क्रमशः चित्र 1, 2, 3, में प्रदर्शित किये गये हैं एवं इससे प्राप्त शर्कराओं के संघटन सारणी 2 में दिये गये हैं। प्राप्त शर्कराओं की संरचना भी चित्र द्वारा प्रदर्शित की गई है।



चित्र 2 : शोरिया रोब्यूस्टा के होलोसैल्यूलोस एल्डीटॉल ऐसीटेट व्युत्पन्न का क्रोमेटोग्राम।

परिणाम एवं विवेचना

रासायनिक संघटन के तुलनात्मक अध्ययन से **शोरिया रोब्यूस्टा** काष्ठ में अन्य काष्ठ की अपेक्षाकृत पेन्टोज़न पदार्थ, लिग्निन पदार्थ की कमी एवं सेल्यूलोस विश्लेपण ऐल्फा सेल्यूलोस की अधिकता, गुणवत्ता एवं व्यापारिक दृष्टि से लुगदी एवं कागज निर्माण के लिये उचित सिद्ध हुई। नॉ० से० पी० सै० का विश्लेषण करने पर L रेमनोस, D जाइलोस, D मैनोस, D गैलेक्टोस और D ग्लूकोस की उपस्थिति काष्ठ के बुरादे में पेपर क्रोमेटोग्राफी द्वारा पाई गई। उसको पुनः गैस क्रोमेटोग्राफी द्वारा सुनि-



चित्र 3 : शुद्ध किये गये शोरिया रोबस्टा एन० सी० पी० (हेमीसेल्यूलोस) के एल्डिटाल ऐसीटेट का गैस क्रोमैटोग्राफ।

सारणी 1

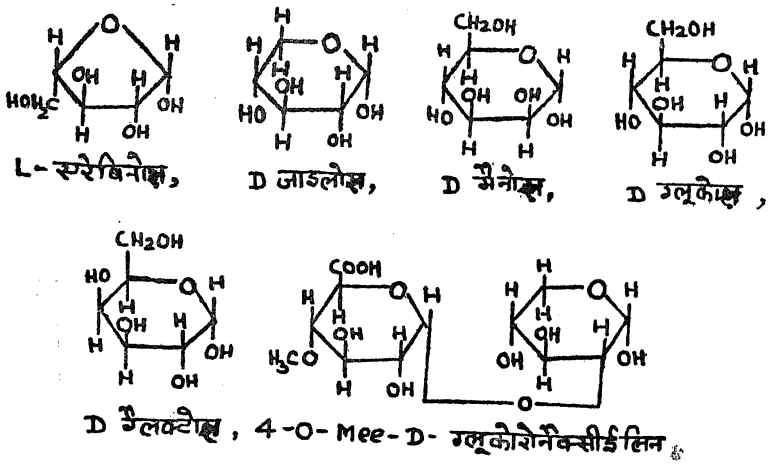
शोरिया रोब्यूस्टा का अन्य काष्ठों के साथ रासायनिक विश्लेषण का तुलनात्मक विवरण

क्रं०	विवरण		शोरिया रोब्यूस्टा	अन्य काष्ठ यूकेलिप्टस	बाँस	पाइन
1.	अकार्बनिक पदार्थ		00.28	00.42	02.40	00.18
2.	ठंडे पानी में विलेय पदार्थ	%	00.82	02.31	05.60	03.26
3.	गर्म पानों में विलेय पदार्थ	%	04.91	03.19	10.10	09.77
4.	ईथर में विलेय पदार्थ	%	02.16	01.10	03.10	05.88
5.	ऐल्कोहल बेंजीन में विलेय पदार्थ		04.01	02.71	03.72	06.17
6.	1% NaOH में विलेय पदार्थ	%	18.42	14.20	20.20	19.10
7.	पेन्ट्रोजन पदार्थ	%	12.96	22.90	18.10	15.62
8.	लिग्निन पदार्थ	%	24.12	27.20	26.80	28.60
9.	होलोसेल्यूलोस	%	78.61	70.00	62.20	66.60
10.	हेमीसेल्यूलोस	%	30.16	32.80	20.90	20.50
11.	ऐल्फा सेल्यूलोस	%	49.28	44.06	41.02	46.20
12.	ऐसिक्टाईल पदार्थ	%	01.10	00.97	02.50	05.17
13.	मेथाक्सिल पदार्थ	%	03.50	07.20	03.10	03.16
14.	यूरोनिक ऐनहाइड्राइड	%	03.07	03.60	—	03.25

परिणाम सूखी डस्ट पर प्रतिशत मात्रा पर आधारित हैं।

श्चित किया गया जो कि उपर्युक्त शर्कराओं की मात्रा को बतलाता है। इसकी उपस्थिति % में प्राप्त हुई, जो क्रमशः L रेमनोस, 29%, L ऐरेबिनोस 1.52%, D जाइलोस, 13.5%, D मैनोस 1%, D ग्लूकोस 57.4% (D गैलेक्टोस अधिक मात्रा में हैं। होलोसैल्यूलोस में पेपर क्रोमेटोग्राफी के द्वारा जो संघटन पाया गया उसमें L ऐरेबिनोस, D जाइलोस और D ग्लूकोस मुख्य हैं जिनको बाद में गैस क्रोमेटोग्राफी के द्वारा निश्चित किया। इसमें उपस्थित शर्कराओं की मात्रा का प्रतिशत इस प्रकार रहा। L एरेबिनोस 15.5%,D जाइलोस 14.6%D, ग्लूकोस 83,9%। नॉ० से० पो० सै० के अंशों का पेपर क्रोमेटोग्राफी के अध्ययन से ज्ञात होता है कि इसमें जाइलोस उदासीन अंश के रूप में ग्लूकोनिक

अम्ल, अम्लीय अंश के रूप में पाया जाता है। इन अंशों को गैस क्रोमेटोग्राफी द्वारा निश्चित किया गया। इसका गैस क्रोमेटोग्राम चित्र 3 में प्रदर्शित किया गया है। जाइलोस एल्डिटोल ऐसीटेट व्युत्पन्न के साथ रहने के कारण उदासीन रहता है एवं इसी को शुद्ध नॉन सैल्यूलोजिक पोलीसैकराइड कहते हैं जिसको 4.0 मी-डी-ग्लूकोरोनेक्सीईलिन से रूप में प्राप्त किया।



उपर्युक्त शर्कराओं एवं 4-0 मी० डी० ग्लूकोरोनेक्सीईलिन की संचरना चित्र में प्रदर्शित की गई है।

शोरिया रोब्यूस्टा में उपस्थित शर्कराओं का विश्लेषात्मक विवरण

क्रं०	शर्करा इकाई	डस्ट			होलोसैल्यूलोज			नॉ०सै०पो०से०		
		मात्रा मि०ग्रा०	% मात्रा	मोलर अनुपात	मात्रा मि०ग्रा०	% मात्रा	मोलर अनुपात	मात्रा मि०ग्रा०	% मात्रा	मोलर अनुपात
1.	L रेमनोस	00.2788	02.93	01		अनुपस्थित		अनुपस्थित		
2.	Lएरेबिनोस	01.3812	15.70	05	01.2152	01.51	01	अनुपस्थित		
3.	Dजाइलोस	12.7768	13.60	04	11.8055	14.59	10	0.065	96.56	
4.	D मैनोस	08.6042	09.10	03	अनुपस्थित			अनुपस्थित		
5.	D ग्लूकोस	00.9446	आंशिक		67.8244	83.92	56	02.46		
6.	D गैलैक्टोस	50.3596	57.42	19	अनुपस्थित			अनुपस्थित		

अतः यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि कागज़ श्रेणी की लुगदी में 4-0 मी डी-ग्लुकोरोने-क्सीईलिन सैल्यूलोस एवं अन्य कार्बनिक पदार्थ के साथ जो कि कागज निर्माण की लुगदी में साइजिंग के लिये डाले जाते हैं के जटिल बंध का निर्माण करते हैं एवं पन्तु की शक्ति एवं तन्यता बढ़ा देते हैं जिससे कागज की गुणवत्ता एवं मात्रा बढ़ जाती है किन्तु रेयॉन श्रेणी की लुगदी में नॉ० सै० पी सै० का अणु भार कम होने के कारण लुगदी की इच्छित श्यानता प्राप्त करने में अत्यधिक बाधा उत्पन्न करती है। अतः रेयॉन श्रेणी की लुगदी में इसका पृथक्करण अनिवार्य है। इस प्रकार नॉ० सै० पो० से० के अध्ययन से विदित होता है कि कागज एवं रेयॉन बनाने के लिये इसका उपयोग सुरक्षा एवं आर्थिक दोनों दृष्टि-कोणों से महत्वपूर्ण है।

निर्देश

1. सेठ, यू० के०, इत्यादि, कान्फ्रेन्स ऑन यूटीलाइजेशन ऑफ हाई वुड फॉर पल्प एंड पेपर एफ० आर० आई० एन्ड सी इंडिया, 1971 पृष्ठ 191.
2. टूर्प, आर० एस०, **सोविकल्चर ऑफ इंडिया ट्रेस** 1921, **1**, 55
3. एन एनेमस हण्ड्रेड्स ईयरस ऑफ इंडिया फारेस्ट 1961, **2**, 46
4. डिके, ई० ई०, Tappi, 1960, **43**, 195.
5. हॉबिले, एल० एफ० तथा नोरमेन, ऐ० जी०, **इण्ड० केम०**, 1982, **24**, 1190
6. टेकनिकल एसोसियेशन ऑफ पल्प एन्ड पेपर इंडस्ट्री न्यूयार्क ओफीसियल स्टेण्डर्ड्स टी-207, टी-221, टी-204, टी-222, टी-223, टी-5, टी-212, टी-22, टी-203,—1980.
7. कैनेडियन पल्प एंड पेपर एसोसियेशन स्टैण्डर्ड्स विधि 1984.
8. बिज, एल० ई०, मरफी, एम०, तथा डी०, एडीको, ए० **पेपर ट्रेड** जे० 1946, 2, 35.
9. हेमिल्टन, जे० के०, तथा क्यूम्वाई, जी० पी०, Tappi 1957, **40**, 781
10. चन्द्रा, एस० के०, इत्यादि, **जूनियन केम० सेक०** 1952, 1833
11. क्रोवेल, ई० पी० तथा ब्रूनेट, बी० पी०, **एनल० केम०**, 1967, **39** (1), **21**
12. बोचाराइट, एल० जी० तथा पाईपर, सी० बी०, Tappi 1970, **52** (2), 257

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

गोबर की खाद (F.Y.M) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (M.R.P.) की उपस्थिति में वाहित मल-जल का उपयोग

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मई 1, 1990]

सारांश

मिट्टी में गोबर की खाद (F.Y.M.) की चार विभिन्न मात्रायें (0,15,20,25 टन प्रति हेक्टेयर) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (M.R.P.) की चार विभिन्न मात्रायें (0,125,150,175 कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर) डालने के बाद पालक को एक सूचक फसल (Test crop) के रूप में उगाया गया । सिंचाई वाहित मल-जल से की गयी । प्रयोगोपरान्त यह पाया गया कि F.Y.M. व M.R.P. की मात्रा में वृद्धि के साथ फसल की उपज में भी वृद्धि होती है ; पालक की पत्तियों में कैडमियम, क्रोमियम तथा लेड की मात्रा भी, F.Y.M. व M.R.P. की मात्रा में वृद्धि के साथ कम होती है । परन्तु जिंक की मात्रा में वृद्धि होती है, जिसका कारण वाहित मल-जल में पहले से ही जिंक की अधिक मात्रा का होना हो सकता है ।

Abstract

Utilisation of sewage water with Farm Yard Manure and Mussoorie Rock Phosphate. *By* S. G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University.

Field experiments were conducted at Sheila Dhar Institute Farm using sewage water for irrigation of spinach crop after adding four different doses of F. Y. M. (0, 15,20, 25 tons/ha) and four doses of Mussoorie Rock Phosphate (M.R.P.) (0.125, 150, 175 kg/ha) both singly and in combination. It was observed that the yield of green vegetable matter was considerably increased in comparison to the control. It was also observed that the Cd, Cr and Pb contents in spinach leaves were reduced with increased doses of FYM and MRP but Zn content was increased due to quality of sewage water (domestic) received in the farm from the surrounding locality.

आजकल यह अनुभव किया जा रहा है कि वाहित मल-जल में पाये जाने वाली विषैली भारी धातुएँ (यथा Cd, Cr, Pb, Zn) फसलों की वृद्धि तथा उपज पर अपना विषैला प्रभाव डालती हैं।[1,2,3] फलस्वरूप पौधें की वृद्धि रुक जाती है तथा उपज कम मिलती है। ऐसी विषाक्त फसलों के पशुओं तथा मनुष्यों द्वारा उपभोग किये जाने पर उनके स्वास्थ्य पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ सकता है। विषैली भारी धातुयें किसी न किसी रूप में कार्बनिक पदार्थों के साथ संकुलन अभिक्रिया द्वारा सम्बन्धित पायी जाती हैं। कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में फास्फोरस युक्त उर्वरक की उपस्थिति में विषैली भारी धातुओं का अवशोषण पौधों में कम होता है क्योंकि कार्बनिक पदार्थ इन भारी धातुओं के साथ जटिल यौगिक बनाता है [4] और उन्हें निश्चेष्ट बनाता है।[5]

वाहित मल-जल के उपयोग सम्बन्धी हमारे अनेक प्रयोगों से यह निष्कर्ष निकलता है कि इसके प्रयोग से मृदा प्रदूषित हो सकती है तथा पौधे विषैली भारी धातुओं की अधिक मात्रा अवशोषित कर सकते हैं। प्रस्तुत अध्ययन में कार्बनिक पदार्थ (गोबर की खाद) तथा फ,स्फोरस युक्त उर्वरक (मसूरी रॉक फास्फेट) की उपस्थिति में वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर पालक की उपज तथा पालक की पत्तियों में विषैली भारी धातुओं (यथा Cd, Cr, Pb तथा Zn) की सान्द्रता पर पड़ने वाले प्रभावों को दर्शाया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के कृषि फार्म को चुना गया, जिसकी सिंचाई वाहित मल-जल द्वारा विगत 15 वर्षो से की जा रही है।

हमने इस प्रयोग के लिये पालक को सूचक फसल के रूप में चुना। प्रयोग के लिये 48 वर्गमीटर के क्षेत्रफल में यादृच्छिक विधि से 1×1 मीटर^2 के प्लाट बनाकर उपचार किया गया। हमने कार्बनिक पदार्थ के स्रोत के रूप में गोबर की खाद (F.Y.M.) की चार विभिन्न मात्रायें (0, 15, 20, 25 टन हैक्टेयर) तथा फास्फेट के स्रोत के रूप में मसूरी रॉक फास्फेट (M.R.P.) की चार विभिन्न मात्रायें (0, 125, 150, 175 किलोग्राम प्रति हैक्टेयर) प्रयुक्त कीं। मसूरी रॉक फास्फेट में कुल P_2O_5 की मात्रा 19.4% तथा गोबर की खाद में कुल कार्बन, नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं पोटाश की मात्रायें क्रमशः 1.5, 0.5, 0.25 तथा 0.5% थीं। पालक की बुवाई दिनांक 19.4.89 को 20 किलोग्राम बीज प्रति हैक्टेयर की दर से की गयी। प्लाटों की सिंचाई वाहित मल-जल से समय-समय पर की गयी। कुल 8 सिचाइयाँ की गयीं। लगभग 60 दिन उपरान्त फसल की कटाई की गयी। उपज सम्बन्धी आँकड़े सारणी 1 में दिये गये हैं।

पौधों की पत्तियों को सुखाकर बारीक पीसकर द्वि-एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित करके एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सहायता से विषैली भारी धातुओं की कुल मात्रा ज्ञात की गयी। परिणाम सारणी 2 में अंकित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न प्रयोगों द्वारा प्राप्त परिणामों का विवरण इस प्रकार है—

सारणी 1

पालक की उपज

उपचार	ताजा भार कि०ग्रा०/मी०^2	शुष्क भार ग्राम/मी०^2
1. (FYM+MRP=0) कन्ट्रोल	0.300	60
2. FYM(0)+MRP (125 कि०ग्रा०/है०)	0.900	140
3. FYM (0)+MRP (150 कि०ग्रा०/है०)	0.900	140
4. FYM (0)+MRP (175 कि०ग्रा०/है०)	1.000	160
5. FYM (15 टन/है०)+MRP (0)	1.200	180
6. FYM (15 टन/है०)+MRP (125 कि०ग्रा०/है०)	1.200	180
7. FYM (15 टन/है०)+MRP (150 कि०ग्रा०)/है०)	1.300	180
8. FYM(15 टन/हैं०)+MRP (175 कि०ग्रा०/है०)	1.100	160
9. FYM (20 टन/है०)+MRP (0)	1.000	160
10. FYM (20 टन/है०)+MRP (125 कि०ग्रा०/है०)	1.000	160
11. FYM (20 टन/है०)+MRP(150 कि०ग्रा०/है०)	1.500	200
12. FYM (20 टन/है०)+MRP 175 कि०ग्रा०/है०)	1.300	180
13. FYM (25 टन/है०)+MRP (0)	2.000	240
14. FYM (25 टन/है०)+MRP(125 कि०ग्रा०/है०)	2.200	240
15. FYM (25 टन/है०)+MRP (150 कि०ग्रा०/है०)	2.800	260
16. FYM (25 टन/है०)+MRP (175 कि० ग्राम/है०)	2.800	260

सारणी 2

पालक की पत्तियों में भारी धातुओं की सान्द्रता

उपचार	भारी धातुओं की सान्द्रता (पी० पी० एम०)			
	Cd	Cr	Pb	Zn
1. (FYM+MRP=0) कन्ट्रोल	3.50	12.0	10.0	10.2
2. FYM(0)+MRP(125 कि०ग्रा०/है०)	3.20	10.9	9.6	12.2
3. FYM(0)+MRP (150 कि०ग्रा०/है०)	4.40	11.2	9.8	12.0
4. FYM(0)+MRP (175 कि०ग्रा०/है०)	4.80	11.5	9.2	11.5
5. FYM(15 टन/है०)+MRP(0)	3.15	11.4	9.4	13.9
6. FYM(15 टन/है०)+MRP(125 कि०ग्रा०/है०)	3.20	10.5	8.5	14.2
7. FYM(15 टन०/है०)+MRP(150कि०ग्रा०/है०)	3.30	10.8	8.8	16.2
8. FYM(15 टन०/है०)+MRP(175 कि०ग्रा०/है०	3.10	10.9	8.5	16.6
9. FYM(20 टन/है०)+MRP(0)	3.90	10.6	9.9	17.0
10. FYM(20 टन/है०)+MRP(125कि०ग्रा०/है०)	3.60	11.0	9.2	14.6
11. FYM(20 टन/है०)+MRP(150 कि०ग्रा०/है०)	4.20	10.8	8.5	15.6
12. FYM(20टन/है०)+MRP(175कि०ग्रा०/है०)	3.80	10.6	8.8	17.0
13. FYM(25टन/है०)+MRP(0)	2.90	9.9	8.2	18.0
14. FYM(25 टन/है०)+MRP(125कि०ग्रा०/है०)	3.10	10.8	9.5	16.4
15. FYM(25टन(है०)+MRP(150 कि०ग्रा०/है०)	3.00	10.2	9.2	15.9
16. FYM(25टन०/है०)+MRP(175 कि०ग्रा०/है०)	2.80	9.5	8.0	16.2

सारणी 1 में अंकित उपज सम्बन्धी परिणामों से इस बात की पुष्टि होती है कि कार्बनिक पदार्थ तथा फास्फेट की अधिक मात्रा की उपस्थिति में पालक की सर्वाधिक उपज होती है । यह उपज कन्ट्रोल की तुलना लगभग 9 गुना (शुष्क भार में 4.5 गुना) है ।

सारणी 2 के विवेचन से स्पष्ट है कि कार्बनिक पदार्थ तथा फास्फेट की मात्रा में वृद्धि के साथ Cd, Cr, तथा Pb का अवशोषण पालक की पत्तियों में कम होता है । अकेले मसूरी रॉक फास्फेट या

अकेले कार्बनिक पदार्थ की कम या औसत मात्रा प्रयोग करने पर भारी धातुओं के अवशोषण में कोई विशेष कमी नहीं आती है। यदि कार्बनिक पदार्थ अधिक मात्रा में (25 टन प्रति हैक्टेयर) प्रयोग किया जाता है तो कैडमियम (Cd) का अवशोषण 18-20 प्रतिशत तक कम हो जाता है किन्तु साथ ही मसूरी रॉक फास्फेट की भी अधिक मात्रा प्रयुक्त होनी चाहिये। कैडमियम (Cd) की ही तरह लेड (Pb) के अवशोषण में 20% तथा क्रोमियम (Cr) के अवशोषण में 16 % तक की कमी होती है। केवल जिंक (Zn) ही ऐसी भारी धातु है जिसके अवशोषण में कोई कमी नहीं आती बल्कि अधिकता ही परिलक्षित होती है। वाहित मल-जल में पहले से ही जिंक की मात्रा अधिक होने के कारण हो ऐसा सकता है।

इस प्रकार इस बात की संस्तुति की जा सकती है कि मल-जल का उपयोग अकेले न करके खेतों में कार्बन तथा फास्फोरस की पूर्ति करने के बाद सिंचाई की जानी चाहिये। तदुपरान्त उगी फसल में विषैली भारी धातुओं की सांद्रता स्वाभाविक रूप से कम हो जायेगी।

निर्देश

1. ली रिचे, एच० एच०, J. Agric. Sci. (Camb) 1968, 71, 205-8.

2. पेटरसन, जे० बी० ई०, Metal toxicities arising from industry in Trace Elaments in Soils and Crops, 1971, pp. 193-207, MAFF Tech. Bull. 21, HMSO, London.

3. वेबर, जे०, Water Pollut. Control, 1972, 71, 404-13.

4. ब्लूमफील्ड, सी०, किल्सो, डब्ल्यू० आई० तथा प्रूडेन जी०, Soil Sci., 1976, 27, 16-31.

5. स्ट्रिकलैण्ड, आर० सी०; चने, डब्ल्यू० आर० तथा लमोरेक्स, आर० जे०, Plant and Soil, 1979, 52, 393-402

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 4, 1990

प्रतिपादन-पूर्व स्थित आँकडों पर बी०ई०टी० समीकरण की अनुप्रयोज्यता

जगदीश प्रसाद तथा कान्ति प्रसाद

रासायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—जनवरी 1, 1990]

सारांश

1938 में प्रतिपादित बी० ई० टी० समीकरण की वैधता को सिद्ध करने के लिए समीकरण को बर्टेल, शेपलर एवं स्लोन द्वारा 1931 में सम्पन्न किये गये सिलिका पर बेन्जीन में एथिल ऐल्कोहॉल विलयन के अधिशोषण के द्वारा प्राप्त आँकड़ों को सफलतापूर्वक अनुप्रयुक्त किया गया है।

Abstract

Applicability of BET equation to the data existing before its introduction. *By* Jagdish Prashad and Kanti Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The validity of BET equation has been proved by applying it successfully to the data on the adsorption of ethyl alcohol in benzene on silica as obtained by Bartell, Scheffler and Sloan in 1931.

बी०ई०टी० समीकरण[1] की वैधता को सिद्ध करने के लिए किये गए परवर्ती प्रयोगों में स्वपक्ष-दुराग्रह की मानवीय दुर्बलता के प्रभाव की सम्भावना से इंकार नहीं किया जा सकता; किन्तु, पूर्ववर्ती प्रयोगों में इसकी तनिक भी सम्भावना नहीं है। पूर्ववर्ती संचित आँकड़ों के भंडार में से अनेक प्रयोग[2-5] बी० ई० टी० समीकरण की अनुप्रयोज्यता सिद्ध करते हैं। प्रस्तुत लेख में बर्टेल, शेफ्लर एवं स्लोन[2] के 1931 में सम्पादित प्रयोग के एक उदाहरण को उद्धृत किया गया है जिसमें सिलिका पर बेंजीन में ऐथिल ऐल्कोहाल का अधिशोषण ज्ञात किया गया था।

x-ν के आलेखन से प्राप्त वक्र से x के सुविधाजनक मानों के लिए तत्सम्बन्धी ν के मानों को ज्ञात किया गया (सारणी 2)। यदि अधिशोषित परतों की संख्या=n=1, तब $x=\pi(nx)=\triangle(nx)$, जबकि [6,7]

$$\pi(nx)=x.\ \frac{(1-x^n)}{(1-n)} \tag{1}$$

तथा,

$$\Delta(nx)=x.\frac{(1-x^n)-nx^n(1-x)}{(1-x)^2} \tag{2}$$

सारणी 1

SiO_2 की मात्रा (ग्राम में)	ऐल्कोहॉल की प्रारम्भिक सान्द्रता	ऐल्कोहॉल की अन्तिम सान्द्रता	ऐल्कोहॉल का अधिशोषण	0.2 ग्राम SiO_2 के लिए ऐल्कोहॉल की सान्द्रता	
(a)	(co)	(v′)	(v′)	(v)	$c'/c_o=x$
0.2622	0.01436	0.00601	0.00835	0.00637	0.4185
0.2503	0.02745	0.01720	0.01025	0.00817	0.6266
0.2608	0.04217	0.03001	0.01216	0.00930	0.7116
0.2534	0.13070	0.12810	0.00260	0.00205	0.9803
0.2186	0.29195	0.28320	0.00875	0.00800	0.9700
0.2540	0.74883	0.74810	0.00073	0.00058	0.9990

सारणी 2

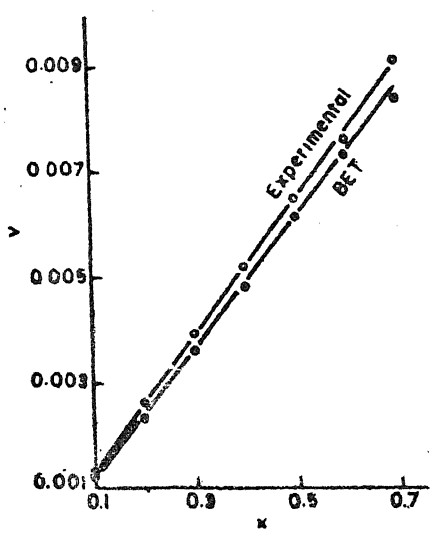
		यदि $n=1$		यदि $n=2$		यदि $n=3$	
x	v	$\pi(nx)$	$\Delta(nx)(v$	$\pi(nx)$	$\Delta(nx)/v$	$\pi(nx)$	$\Delta(nx)/v$
0.1	0.0013	0.10	76.9	0.11	169.2	0.111	94.5
0.2	0.0026	0.20	76.9	0.24	107.7	0.248	116.9
0.3	0.0039	0.30	76.9	0.39	123.1	0.417	145.4
0.4	0.0052	0.40	76.9	0.56	138.5	0.624	175.4
0.5	0.0065	0.50	76.9	0.75	153.8	0.875	211.5
0.6	0.0078	0.60	76.9	0.96	156.4	1.176	252.3
0.7	0.0091	0.70	76.9	1.19	184.6	1.531	297.7

$\pi(nx)$ तथा $\triangle(nx)/v$ के आलेख ($n=1$ तथा 2 के लिए) अभीष्ट सरल रेखाएं नहीं हैं (चित्र 1); अर्थात्, $n=1$ तथा 2 के लिए बी०ई०टी० (ब्रुनोअर-एमेट-टेलर) समीकरण लागू नहीं होता। $n=3$ के लिए $\pi(nx)$ तथा $\triangle(nx)/v$ के सम्बन्धित मानों को समीकरण 1 तथा 2 की सहायता से परिकलित किया गया (सारणी 2, चित्र 1)।

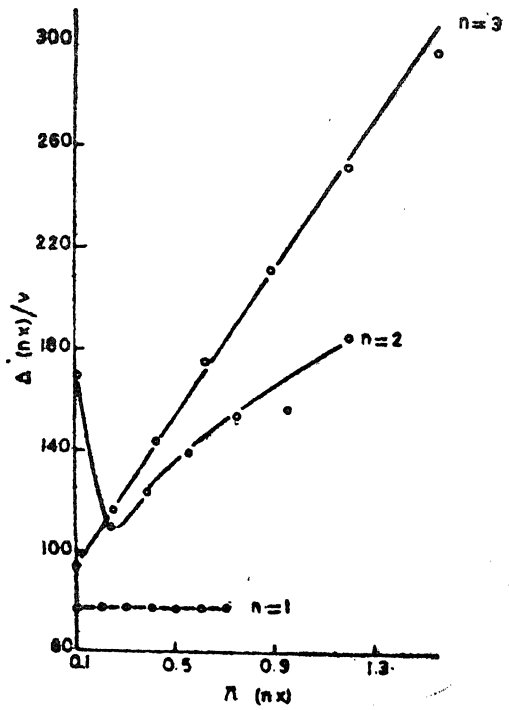
$\pi(nx)-\triangle(nx)/v$ के आलेख से प्राप्त सरल रेखा की प्रवणता $1/v_m$ तथा अंतः खंड $1/v_m.c$ से v_m तथा c के मानों का परिकलन किया जा सकता है, जबकि[1,6,7] समस्त अधिशोषक पृष्ठ के एकाणुक परत से आच्छादित होने पर अधिशोषित अधिशोष्य की मात्रा v_m है, तथा c अधिशोष्य की वह सान्द्रता है जब वह अधिशोष्य के साथ साम्यावस्था में होता है। सैद्धान्तिक दृष्टि से ऐल्कोहॉल की वह मात्रा (v) जो बी०ई०टी० समीकरण[1] के आधार पर अधिशोषित होनी चाहिए थी, उसका परिकलन उपर्युक्त मानों की सहायता से किया गया, जबकि

$$v=\frac{v_m.c.x}{(1-x)}\left[\frac{1-(n+1)\,x^n+nx^{n+1})}{1+(c-1)x-cx^{n+1}}\right] \qquad (3)$$

उपर्युक्त बी०ई०टी० समीकरण 3 की सहायता से v के मानों का परिकलन किया गया (सारणी 3, चित्र 2)।



चित्र 1.



चित्र 2

सारणी 3

(यदि $n=3$)

x	अधिशोषित ऐल्कोहॉल (v) की मात्रा (ग्राम में)	
	प्रयोग द्वारा	बी०ई०टी० द्वारा
0.1	0.0013	0.0012
0.2	0.0026	0.0023
0.3	0.0039	0.0036
0.4	0.0052	0.0038
0.5	0.0065	0.0061
0.6	0.0078	0.0073
0.7	0.0091	0.0084

उपर्युक्त आँकड़ों तथा परिकलनों से स्पष्ट है कि बेन्ज़ीन से ऐल्कोहॉल के विलयन से सिलिका पर अधिशोषण से त्रिआणविक परत का निर्माण होता है। इस प्रकार सिलिका के द्वारा अजलीय द्विअंगी निकायों से अधिशोषण के लिए बी०ई०टी० समीकरण अनुप्रयोज्य है।

निर्देश

1. ब्रुनोअर, एस०, एमेट, पी० एच० तथा टेलर, ई०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1938, 60, 309.
2. बर्टेल, एफ० ई०, शेफ्लर, जी० एच०, तथा स्लोन, सी० के०, वही, 1931, **53**, 2501.
3. कोलथॉफ, आई० एम० तथा मैक नैविन, डब्लू० एम०एम०, **वही**, 1936, **58**, 1544.
4. ऑस्ट्वाल्ड, डब्लू० तथा आइज़ग्बीरे, आर० डी०ई०, **केमि० ऐब्स्ट०**, 1922, **16**, 2627.
5. यूलर, एच० वी० तथा ज़िम्मरलुंड, जी०, **वही**, 1922, **16**, 1351.
6. शास्त्री, वी० आर०, "पृष्ठ-रसायन," मध्यप्रदेश ग्रन्थ अकादमी, भोपाल, 1971.
7. प्रसाद, जे० तथा प्रसाद, के०, **बोल० सोसा० किम०**, 1983, **49**, 162.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. D. Phil., F. N. A. Sc.

Editor
Dr. Chandrika Prasad
D. Phil.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद